



Lietuvos matematikų draugijos
LXIV KONFERENCIJOS SANTRAUKOS

Birželio 21–22 d., Vilnius

Vilniaus universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas



VILNIAUS
UNIVERSITETO
LEIDYKLA

2023

Organizacinis komitetas:

- Pirmininkė: dr. Jurgita Markevičiūtė (VU MIF TMI)
- Vicepirmininkas: dr. Paulius Drungilas (VU MIF MI)
- dr. Andrius Grigutis (VU MIF MI)
- dr. Kristina Kaulakytė (VU MIF TMI)
- dr. Rūta Levulienė (VU MIF TMI)
- dr. Rita Juodagalvytė (VU MIF TMI)
- Aidas Medžiūnas (VU MIF TMI)
- Rokas Puišys (VU MIF MI)

Programinis komitetas:

- Pirmininkas: Artūras Štikonas (VU)
- Pirmininko pavaduotojas: Jonas Jankauskas (VU)
- Paulius Drungilas (VU)
- Kęstutis Dučinskas (KU)
- Audronė Jakaitienė (VU)
- Roma Kačinskaitė (VU)
- Olga Kurasova (VU)
- Kęstutis Kubilius (VU)
- Ričardas Krikštolaitis (VDU)
- Renata Macaitienė (VU)
- Jurgita Markevičiūtė (VU)
- Edmundas Mazėtis (VU)
- Bronė Narkevičienė (KTU)
- Alfredas Račkauskas (VU)
- Jonas Šiaulyš (VU)
- Olga Štikonienė (VU)

Bibliografinė informacija pateikiama Lietuvos integralios bibliotekų informacinės sistemos (LIBIS) portale ibiblioteka.lt

ISBN 978-609-07-0887-3 (spausdinta knyga)

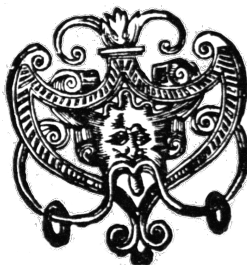
ISBN 978-609-07-0888-0 (skaitmeninis PDF)

© Vilniaus universitetas, 2023

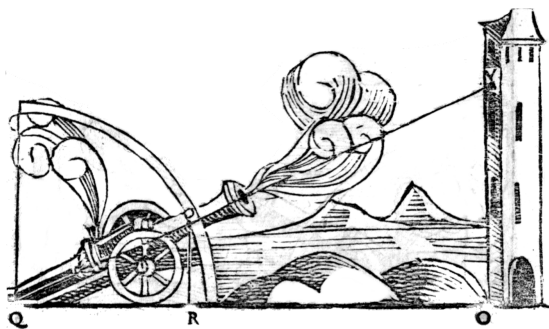
Šios knygos viršeliui ir iliustracijoms buvo panaudotos dviejų Vilniaus universiteto studentų (Jono Rudaminos-Dusetišio ir Jono Mlodzianovskio) XVII a. daktaro disertacijų tezės, saugomos Vilniaus universiteto bibliotekos kultūros ir mokslo paveldo rinkiniuose. Tezės parašytos lotyniškai, jose nagrinėjami optikos principai ir teoremos, katoptrikos (mokslo apie plokščiuosius, iškiluosius, įgaubtuosius veidrodžius ir lęšius) bei katoptrokaustikos (mokslo apie padegamuosius veidrodžius) teoremos; astronomijos, geometrijos bei balistikos uždaviniai.

Įdomu, kad J. Rudaminos-Dusetišio disertaciją papildė penkių Vilniaus universiteto studentų panegirinės eilės, skirtos pašlovinti jos autorių. Viena disertacija dedikuota Lietuvos dvaro maršalkai Kazimierui Leonui Sapiegai, o kita pačiam Lenkijos karaliui ir Lietuvos didžiajam kunigaikščiui Vladislavui Vazai.

Šių disertacijų tezių elektronines versijas galima rasti Vilniaus universiteto bibliotekos skaitmeninėse kolekcijose (<https://kolekcijos.biblioteka.vu.lt/>)



Plenariniai pranešimai



Estimation of cyclical time series: an application to Central England Temperatures

Liudas Giraitis[†], Fulvia Marotta[‡]

[†] Queen Mary University of London

[‡] University of Oxford

In this paper we present a methodology that corrects for the irregular space between realizations of unevenly spaced time series and provides accurate estimates of AR model parameters. This methodology is simple in its application and its asymptotic properties are investigated thoroughly using Monte Carlo simulations. Furthermore, using results for estimation of AR parameters under missing data, we develop a successful time series tool for forecasting and estimation of time series with cyclically varying parameters. More specifically, we assume periodicity of the mean and autoregressive parameters of such models. To illustrate the robustness and flexibility of the method, we conduct an application, modelling daily temperatures data. This estimation technique allows us to uncover cyclical (daily as annual) patterns in the data without imposing restrictive assumptions. Using the Central England Temperature (CET) time series (1772 - today) and the daily England-Wales precipitation series (1931 - today) we find with a high level of accuracy that temperature intra-year average and persistence have increased in the sample 1850-2020 compared to 1772 - 1850, especially for the winter months, while the variance of the random shocks of AR(1) model fitted to the data seems to be decreasing over time.

References

- [1] Di Cecco, G. J. and Gouhier, T. C. 201). Increased spatial and temporal autocorrelation of temperature under climate change. *Scientific Reports* 8(1):1–9.
- [2] Francis, J. A. and Vavrus, S. J., 2015. Evidence for a wavier jet stream in response to rapid Arctic warming. *Environmental Research Letters* 10(1):014005.
- [3] Francis, J., Skific, N., and Vavrus, S. 2018. North American weather regimes are becoming more persistent: Is Arctic amplification a factor? *Geophysical Research Letters* 45(20):11–414.
- [4] Proietti, T. and Hillebrand, E. 2017. Seasonal changes in Central England temperatures. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)* 180(3):769–791.

Dedukcinio argumento konstravimas sprendžiant mokyklinį tekstinį uždavinį

Rimas Norvaiša

Vilniaus universitetas

Aptarsime mokyklinės matematikos mokslinius tyrimus ir jų ryšį su matematikos mokymo praktika mokykloje. Pliustracijai pristatysime tokio tyrimo rezultata – mokyklinio tekstinio uždavinio užduoties papildymą, kuriuo besimokančiajam siūloma pagrįsti užduoties situacijos matematinę reprezentaciją. Tai būdas, kuriuo siekiama prasmingai integruoti logikos mokymą į mokyklinės matematikos turinį. Pagrindines mokyklinės matematikos tyrimų kryptis iliustruosime remdamiesi Europos matematikos mokymo tyrimų kongresų programomis.

Literatūra

- [1] Kilienė, I. and Norvaiša, R. 2022a. The use of a deductive reasoning when solving a word problem. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolandi, & F. Ferreti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. (pp. 209-216). Free University of Bozen-Balzano, Italy and ERME.
- [2] Kilienė, I. and Norvaiša, R. 2022b. Solving word problems with reasoned judgement. *Lithuanian Mathematical Journal*, 62(4), 467–480. <https://doi.org/10.1007/s10986-022-09580-x>

Full and partial dimension reduction in thin structures¹

Grigory Panasenko

University Jean Monnet
Vilnius University

Methods of full and partial dimension reduction are considered for modeling of thin structures. Such domains are unions of thin rectangles (for two-dimensional setting) or thin cylinders (for three dimensions) and some smoothing domains near the small sides of the rectangles or small bases of the cylinders. These domains depend on a small parameter $\varepsilon > 0$, the ratio of the sides of thin rectangles or the ratio of the diameter of the cross-sections of cylinders to their lengths. Thin structures correspond to idealized shapes of pipeline-type industrial installations or blood vessels networks. Direct numerical simulations in such structures are impossible or are very slow because of the complexity of the domain and as a result, very fine mesh of the numerical scheme. The talk presents asymptotic methods allowing to solve effectively partial differential equations in such domains.

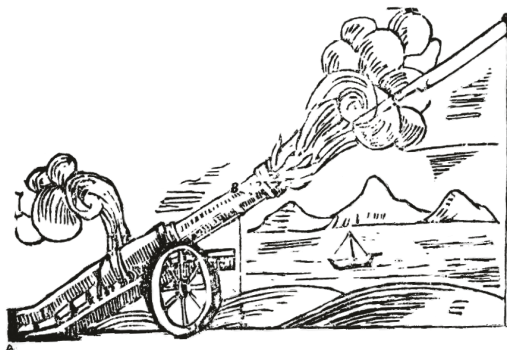
The talk will consider two simplified problems (Dirichlet's or Neumanns boundary conditions for the Poisson equation) in order to introduce briefly the method of dimension reduction (DR) and the method of asymptotic partial decomposition of the domain (MAPDD). The generalizations for the Navier-Stokes equations will be discussed. The talk follows the beginning of Chapter IV of [1] and [2].

References

- [1] Panasenko, G. 2022. *Introduction to Multiscale Mathematical Modeling*. Singapore: World Scientific.
- [2] Panasenko, G., Pileckas, K., 2015, Asymptotic analysis of the non-steady Navier-Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary layer-in-time, *Nonlinear Analysis, Series A, Theory, Methods and Applications*, 122, 125-168.

¹European Social Fund (project No 09.3.3-LMT-K-712-17-003) under grant agreement with the Research Council of Lithuania (LMTLT)

Algebra, skaičių teorija ir geometrija



Relative sizes of divisors of a random permutation

Gintautas Bareikis, Eugenijus Manstavičius

Vilnius University

Let a permutation $\sigma \in \mathbf{S}_n$ act on the set $[n] := \{1, \dots, n\}$ and have a unique representation (up to the order) by the product of independent cycles $\sigma = \kappa_1 \cdots \kappa_w$. Here $w = w(\sigma)$ denotes the number of cycles. Moreover, set $\mathbf{S}_0 = \{\emptyset\}$. Visually, σ can be understood as the labelled digraph $G_\sigma = (V_\sigma, E_\sigma)$ having the vertex set $V_\sigma = [n] := \{1, \dots, n\}$ and comprised from cycles whose vertexes are labelled by the ordered numbers as given in κ_i , $i \leq w$. A subset $\delta \subset \{\kappa_1, \dots, \kappa_w\}$, including the empty one, is called a *divisor* of σ . We write this as $\delta|\sigma$. Let $|\delta| = m$ be its size, that is the number of vertices. Formally, if the labels in δ do not comprise the set $[m]$, then $\delta \notin \mathbf{S}_m$. Imbedding of such δ into \mathbf{S}_m by a reduction of the labels preserving the mutual order is not injective. Despite to this obstacle, we succeed in creating a theory analogous to that known for the divisors of a natural number (see, e.g., [1] and subsequent papers). Namely, taking σ at random, we study the ratio

$$X(u) := X(\sigma, u) = \frac{1}{f(\sigma)} \sum_{\substack{\delta|\sigma \\ |\delta| \leq un}} g(\delta); \quad f(\sigma) = \sum_{\delta|\sigma} g(\delta), \quad \sigma \in \mathbf{S}_n, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Here

$$g(\delta) = \prod_{j=1}^{|\delta|} g_j(k_j(\delta))$$

is a multiplicative function defined via $g_j(\cdot) : \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ satisfying $g_j(0) = 1$ and $k_j(\delta)$ is the number of cycles of length j in δ .

In particular, we establish that at least the symmetric *Beta distribution function* can appear as the limit for the expectation of the process $X(u)$ as $n \rightarrow \infty$. This recovers the recent result by S.-K. Leung [2] involving the *Arcsine law*.

References

- [1] Bareikis, G. and Manstavičius, E. 2007. On the DDT theorem, *Acta Arith.*, 126:155–168.
- [2] Leung, S.K. 2022. Dirichlet law for factorization of integers, polynomials and permutations *arXiv:2206.14728v2 [math.NT]*.

Mishou teorema dzeta funkcijoms su periodiniais koeficientais

Mindaugas Jasas

Vilniaus universitetas

Tegul $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ ir $\mathbf{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinės kompleksinių skaičių sekos, $0 < \alpha \leq 1$ – fiksuotas skaičius, o $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Periodinė ir periodinė Hurvico dzeta funkcijos, pusplokštumėje $\sigma > 1$, apibrėžiamos eilutėmis $\zeta(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$ bei $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+\alpha)^s}$ ir yra meromorfiškai pratęsimos į visą kompleksinę plokštumą. Pranešime bus pristatomas absoliučiai konverguojančių eilučių, susietų su funkcijomis $\zeta(s; \mathbf{a})$ ir $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b})$, mišrusis universalumas. Pirmąją mišraus jungtinio universalumo teoremą įrodė H. Mišu (Mishou) Rymano ir Hurvico dzeta (su transcendenčiuoju parametru α) funkcijų rinkiniui [1].

Tegul $\theta > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius, $u > 0$, $v_u(m) = \exp\{-(m/u)^\theta\}$ bei $v_u(m, \alpha) = \exp\{-((m+\alpha)/u)^\theta\}$. Apibrėžiame absoliučiai konverguojančias eilutes

$$\zeta_u(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m v_u(m)}{m^s} \quad \text{ir} \quad \zeta_u(s, \alpha; \mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m v_u(m, \alpha)}{(m+\alpha)^s}.$$

Pranešime nagrinėsime analizinių funkcijų porų aproksimavimo postūmiams

$$(\zeta_{u_T}(s + iT; \mathbf{a}), \zeta_{u_T}(s + iT, \alpha; \mathbf{b})),$$

galimybę, su $u_T \rightarrow \infty$, kai $T \rightarrow \infty$. Pateiksime modifikuotą universalumo teoremos atvejį, kai postūmių, aproksimuojančių duotas analizes funkcijas, apatinis tankis yra pakeičiamas tiesiog tankiu. Rezultatas publikuotas [2], jis praplečia ankstesnius rezultatus, gautus tokio tipo absoliučiai konverguojančioms eilutėms (pavyzdžiui, [3], [4]).

Literatūra

- [1] Mishou, H. 2007. The joint value-distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions. *Lith. Math. J.*, 47(1): 32–47.
- [2] Balčiūnas A., Jasas, M., Macaitienė, R., Šiaučiuonas, D. 2023. On the Mishou Theorem for zeta-functions with periodic coefficients. *Mathematics*, 11(2042): 1–10.
- [3] Laurinčikas, A. 2021. Approximation of analytic functions by an absolutely convergent Dirichlet series. *Arch. Math.*, 117(1): 53–63.
- [4] Jasas, M., Laurinčikas, A., Šiaučiuonas, D. 2021. On the approximation of analytic functions by shifts of an absolutely convergent Dirichlet series. *Math. Notes*, 109(5-6): 876–883.

Pastaba apie diskretų aproksimavimą dzeta funkcijų klasėmis

Roma Kačinskaitė

Vilniaus universitetas
Vytauto Didžiojo universitetas

Yra žinoma, kad bet kuri nevirstanti nuliu analizinė funkcija gali būti aproksimuojama Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, postūmiais juostos $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ kompaktiniuose poaibiuose. Tai – vadinamoji universalumo Voronino prasme dzeta funkcijų savybė.

Mišraus universalumo atveju į aproksimuojantį rinkinį apjungiamos dviejų skirtingų tipų dzeta ar L funkcijos (turinčios Oilerio sandaugą ir jos neturinčios). Toks universalumas gali būti įrodomas plačioms dzeta funkcijų klasėms, pvz.: rinkinys yra sudarytas iš Matsumoto dzeta funkcijų klasės ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų.

Pranešime pristatysime mišraus jungtinio diskretaus universalumo kai kuriuos atvejus aukščiau minėtoms dzeta funkcijų klasėms. Jie yra įrodyti bendradarbiaujant pranešimo autorei, prof. K. Matsumoto ir prof. L. Pankovskiui (žr. [1], [2], [3]).

Literatūra

- [1] Kačinskaitė, R. and Matsumoto, K. 2017. On mixed joint discrete universality for a class of zeta-functions. In: *Proc. of 6th Intern. Conf., Palanga, Lithuania, 2016*, Anal. Probab. Methods Number Theory, A. Dubickas et al. (Eds.), Vilnius: Vilnius University Publ. House. pp. 51–66.
- [2] Kačinskaitė, R. and Matsumoto, K. 2020. On mixed joint discrete universality for a class of zeta-functions: a further generalization. *Math. Modell. Anal.* 25(4): 569–583.
- [3] Kačinskaitė, R., Matsumoto, K. and Pańkowski, Ł. 2022. On mixed joint discrete universality for a class of zeta-functions: one more case. *Taiwanese J. Math.* doi 10.11650/tjm/220804 Advance Publication, 1–16.

Dešimtainiai skaičiai

Ričardas Kudžma

Vilniaus universitetas

Skaitant lietuviškus matematikos vadovėlius paaiškėjo, kad juose nėra visuotinai priimto dešimtainės trupmenos apibrėžimo. Pasirodo, kad problemą išsprendžia dešimtainio skaičiaus sąvoka. Vokiškame 6-os klasės vadovėlyje [3] yra dvi sąvokos: *der Bruch - trupmena* ir *die Dezimalzahl - dešimtainis skaičius*. Prancūziškuose tekstuose dešimtainiams skaičiams parodoma dar didesnė pagarba [1], jų aibei suteikiamas vardas D , žinoma, nuo žodžio *decimal*. Tai ne be pagrindo. Pasirodo, kad D turi algebrinę žiedo struktūrą, kaip ir sveikųjų skaičių žiedas Z . Dar daugiau, D yra žiedo Z lokalizacija multiplikatyviojo poaibio $S = \{1, 10, 100, \dots\}$ atžvilgiu. Žiedo lokalizacija yra svarbi komutatyvios algebros konstrukcija. Bourbaki knygoje [2] lokalizacijai skirta daugiau kaip 100 puslapių skyrius. Jei paimsime kitas multiplikatyvias aibes $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\}$, $S_3 = Z \setminus \{0\}$, tai žiedo Z lokalizacijos bus pati Z , B - dvejetainiai skaičiai ir Q - racionalieji skaičiai, atitinkamai.

Dešimtainių skaičių aibė D įdomi ne tik algebriniu požiūriu. Visas mūsų gyvenimas apsuptas dešimtainių skaičių. Dešimtainiai skaičiai yra idealiai pritaikyti dešimtainei matų sistemai (gal atvirkščiai?). Žinoma, D pasaulis nėra tobulas, nes jis nėra uždaras dalybos operacijos atžvilgiu, beje, kaip ir Z . Bet objektus, kuriuos sutinkame kasdien ir beveik visur, reikia atvirai vadinti jų tikroju vardu - *dešimtainiai skaičiai*. Taip yra įrašyta naujoje matematikos mokymo programoje.

Literatūra

- [1] Beltramone, J. P., Boure, F., Léon, F., Merdy, C., Plas, C., Tosetti, R. 2019. *Déclic 2de Maths*. Vanves: Hachette.
- [2] Bourbaki, N. 1961. *Algèbre Commutative*. Hermann.
- [3] Wennekens, U. ir dar 13 bendraautorų. 2021. *Dreifach Mathe*. Berlin, Cornelsen Verlag.

Apibendrinta Boro-Jeseno tipo teorema Epšteino dzeta funkcijai²

Renata Macaitienė

Vilniaus universitetas
Šiaulių valstybinė kolegija

Tegul Q yra teigiamai apibrėžta kvadratinė $n \times n$ matrica ir $Q[\underline{x}] = \underline{x}^T Q \underline{x}$ su visais $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$. Epšteino dzeta funkcija $\zeta(s; Q)$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Q[\underline{x}])^{-s}, \quad \sigma > \frac{n}{2}.$$

Funkcija $\zeta(s; Q)$ yra analiziškai pratęsiamą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = \frac{n}{2}$ su residuumu $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{\det Q}}$. Išsamią apžvalgą apie šią funkciją galima rasti, pavyzdžiui, [1].

Pranešime bus aptariami tam tikri Epšteino dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymo aspektai – pateiksime tolydžiąsias Boro-Jeseno tipo teoremas silpnąjį tikimybių matų konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje. Bendrame darbe su A. Laurinčiku [2] įrodėme, kad lyginiam $n \geq 4$ ir $Q[\underline{x}] \in \mathbb{Z}$, erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja išreikštinį pavidalą turintis ribinis matas $P_{Q, \sigma}$, kad pusplokštumėje $\sigma > \frac{n-1}{2}$,

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it; Q) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \quad (1)$$

kai $T \rightarrow \infty$, sipnai konverguoja į $P_{Q, \sigma}$. Čia $\text{meas} A$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas, o $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ – erdvės \mathbb{C} Borelio aibių klasė. Aptarsime ir bendresnį rezultatą [3], kuomet vietoje (1) nagrinėjamas

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] : \zeta(\sigma + i\varphi(t); Q) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

silpnasis konvergavimas; čia $\varphi(t)$ yra diferencijuojama funkcija, turinti monotonią išvestinę.

Literatūra

- [1] Nakamura, T., Pańkowski, L. 2013. On zeros and c -values of Epstein zeta-functions. *Šiauliai Math. Semin.*, 8(16): 181–195.
- [2] Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2018. A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. *Results in Math.*, 73(4): 147–163.
- [3] Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2022. A generalized Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. *Mathematics*, 10(2042): 1–11.

²Tyrimus finansavo Lietuvos mokslo taryba. Grantų numeris: S-MIP-22-81.

Apie skaičių kūnų kompozito bei algebrinių skaičių sandaugos laipsnius

Lukas Maciulevičius

Vilniaus universitetas

Natūraliųjų skaičių trejetas $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vadinamas *S-trejetu* (atitinkamai *P-trejetu*), jei egzistuoja tokie algebriniai skaičiai α , β ir γ , kurių laipsniai (virš \mathbb{Q}) atitinkamai a , b ir c , ir $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (atitinkamai $\alpha\beta\gamma = 1$). Straipsnyje [1] iškeltas uždavinys rasti visus S-trejetus. Tame pačiame straipsnyje ir jo tęsinuose [2] bei [3] nagrinėjamas analogiškas uždavinys ir skaičių kūnams. Trejetas $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vadinamas *C-trejetu*, jeigu egzistuoja tokie skaičių kūnai K ir L , kurių laipsniai (virš \mathbb{Q}) atitinkamai a ir b , o kompozito KL laipsnis lygus c . Straipsniuose [1] ir [2] nustatyti visi S-trejetai, tenkinantys sąlygas $a \leq b \leq c$, $b \leq 7$, bei visi C-trejetai, tenkinantys tas pačias sąlygas. Straipsnyje [4] nustatyti visi pavidalo $(a, 8, c)$ ir $(a', 9, c)$ C-trejetai, tenkinantys sąlygas $a \leq 8$ ir $a' \leq 9$.

Be to, straipsniuose [1] ir [3] įrodyta: jeigu \mathcal{C} , \mathcal{S} ir \mathcal{P} žymi, atitinkamai, visų C, S ir P-trejetų aibes, tai

$$\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{P}.$$

Taigi visi S-trejetai, kurie nustatyti minėtuose straipsniuose, kartu yra ir P-trejetai, tačiau jie galimai neišsemia visų P-trejetų (a, b, c) , kuriuose $a \leq b \leq c$, $b \leq 7$.

Pranešimo metu pristatysime naujus rezultatus, publikuotus straipsnyje [5]. Šiame straipsnyje nustatyti visi P-trejetai (a, b, c) , tenkinantys sąlygas $a \leq b \leq c$ ir $b \leq 7$, išskyrus galbūt vieną trejetą.

Literatūra

- [1] Drungilas, P., Dubickas, A. and Smyth C. 2012. A degree problem for two algebraic numbers and their sum. In: *Publicacions Matemàtiques* 56:413-448.
- [2] Drungilas, P., Dubickas, A. and Luca, F. 2013. On the degree of compositum of two number fields. In: *Mathematische Nachrichten* 286.2-3:171-180.
- [3] Drungilas, P. and Dubickas, A. 2016. On degrees of three algebraic numbers with zero sum or unit product. In: *Colloquium Mathematicum* 143.2:159-167.
- [4] Drungilas, P., Maciulevičius, L. 2019. A degree problem for the compositum of two number fields. In.: *Lithuanian Mathematical Journal* 59.1:39-47.
- [5] Maciulevičius, L. 2023. On the degree of product of two algebraic numbers. In: *Mathematics* 11.9: Paper No.2131.

Analizinių funkcijų aproksimavimas Lercho dzeta funkcijomis

Toma Mikalaukaitė, Darius Šiaučiūnas

Vilniaus universitetas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, $0 < \alpha \leq 1$ ir λ – realieji parametrai. Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute $L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i \lambda m} (m + \alpha)^{-s}$ ir turi meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą. Kaip ir daugelis kitų dzeta funkcijų, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, su kai kuriomis parametru λ ir α reikšmių klasėmis, yra universali ta prasme, kad jos postūmiai $L(\lambda, \alpha, s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, aproksimuoja kiekvieną juostoje $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ apibrėžtą analizinę funkciją.

Straipsniuose [1] ir [2] yra gauti rezultatai apie analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais $L(\lambda, \alpha, s + i\tau)$ su bet kokios aritmetinės prigimties parametru λ ir α reikšmėmis.

Pranešime aukščiau paminėti analizinių funkcijų aproksimavimo rezultatai bus apibendrinti Lercho dzeta funkcijų rinkiniams $L(\lambda_1, \alpha_1, s), \dots, L(\lambda_r, \alpha_r, s)$ su bet kokios aritmetinės prigimties parametrais $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ir $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Dėl trumpumo, tegul $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, o $H(D)$ žymi analizinių juostoje D funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija.

1 teorema. Tegul $0 < \lambda_j \leq 1$ ir $0 < \alpha_j \leq 1$, kai $j = 1, \dots, r$, yra bet kokios aritmetinės prigimties parametrai. Tuomet egzistuoja tokia netuščioji, uždaroji aibė $F_{\underline{\lambda}, \underline{\alpha}} \subset H^r(D)$, kad su kompaktinėmis aibėmis $K_1, \dots, K_r \subset D$, $(f_1(s), \dots, f_r(s)) \in F_{\underline{\lambda}, \underline{\alpha}}$ ir su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + i\tau) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

1 teorema turi diskrečiąją versiją. Tegul $\underline{h} = (h_1, \dots, h_r)$, $h_j > 0$, $j = 1, \dots, r$.

2 teorema. Tegul parametrai λ_j ir α_j , $j = 1, \dots, r$, yra tokie pat, kaip ir 1 teoremoje. Egzistuoja tokia netuščioji uždaroji aibė $F_{\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{h}} \subset H^r(D)$, kad su kompaktinėmis aibėmis $K_1, \dots, K_r \subset D$, $(f_1(s), \dots, f_r(s)) \in F_{\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{h}}$ ir su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + ikh_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Literatūra

- [1] Laurinčikas, A. 2019. “Almost” universality of the Lerch zeta-function. *Math. Commun.* 24(1):107–118.
- [2] Rimkevičienė, A. and Šiaučiūnas, D. 2022. On discrete approximation of analytic functions by shifts of the Lerch zeta-function. *Mathematics* 10(24): 4650.

Naujas žvilgsnis į fundamentinius A.Dambrausko mokslinius tyrimus³

Algimantas Milius, Elena Miliūtė

LITAVEM-3

Remiantis A. Dambrausko sukurta I-ojo kvadranto ortogonaliąja trigonometrine sistema, tiriamos elipsinių uždarų kreivių savybės visuose keturiuose apskritimo kvadrantuose, o tai leidžia daryti naujus atradimus S. Lie sferų „kontaktinėje“ geometrijoje. Tai leido iš naujo pažvelgti į matematinius fundamentinius geometrinių formų savybių nustatymo principus – chiralumo išsaugojimą dinaminės inversijos metu (dvigubos, trigubos arba rotacinės (posūkio) veidrodžio).

Literatūra

- [1] Dambrauskas A. 1926. Apie sutrauktines stačiakampes trigonometrijos sistemas, *Lietuvos universiteto Matematikos gamtos fakulteto darbai, t.3 (1924-1926)*, Kaunas, 395–425.
- [2] Dambrauskas A. 1930. Apie sutrauktines stačiakampes trigonometrijos sistemas, *Lietuvos universiteto Matematikos gamtos fakulteto darbai, t.5.1 (1929-30)*, Kaunas, 70–123.
- [3] Milyute E. 2022. Conservation of Differential Inclusion in the Conformal Transformation of a Spherical Vortex onto Itself. 29 IMC Congress, Finland, (Virtual event, In print)
- [4] Ažubalis A. 2015. A. Dambrauskui-Jakštui – 155 metai: “Mes ne savo ugnimi žėruojam ir ne sau aplinkui liejam”, *Propatria*.

³Tyrimus finansavo iš autorių lėšų.

Development of functions of a complex variable on the Lamé functions in conformal geometry⁴

Elena Miliūtė

LITAVEM-3

Based on the expansion of the expression $(z_1 - z)^{-1}$ in terms of spherical functions, which we owe to Heine [1], Neumann [2] showed for the first time that the expansions of complex functions in terms of spherical functions of the first and second kind converge in the domains bounded by ellipses with foci $+1$ and -1 . But in our time, the interpretation of complex functions, to which the Cauchy-Riemann theorem leads in a certain way, becomes more complicated than that of the corresponding section of the expansion of a function in terms of spherical functions (harmonics), because it becomes necessary to distinguish more different cases of conformal mapping of a function; namely, the region of convergence can consist either of a simply connected piece of the surface (lemniscate strip), or of a doubly connected piece (torus), or of a thrice connected piece (an elliptic closed vortex). Because of the recent development of isogonal fields on Lamé functions, there has been a growing interest in additional research on the appearance of "zero sweeps" in geometric algebra. They can progress either according to the Lamé functions of the first kind, or according to the Lamé functions of the second kind. These "zero expansions" in Lamé functions of the first kind are divided into three classes: those that are valid only inside a lemniscate-like curve of the fourth order, and those whose area of convergence is on the oval of the curve of the above system is limited. The universal Lamé formula for the longitudinal and transverse motion of an elliptical vortex is presented [3-5].

References

- [1] Heine E. 1861. Handbuch der Kugelfunktionen, erste Auflage, Berlin, 1861.
- [2] Neumann C. 1862. Ueber die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen erster und zweiter Art, Halle.
- [3] Milyute E., Milyuvėnė V., Milyus A.J.V. 2006. Some Questions of Dynamics of Substance in the Spherical Vortex. *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics Steklov Mathematical Institute of RAN*, 116–117.
- [4] Milyute E., Milyuvėnė V., Milyus A.J.V. 2008. A Dynamics of a Substance in an Isolated Spherical Vortex and its Relationship with Radiation. *IUTAM Symposium "150 Years of Vortex Dynamics"*, 13–16.
- [5] Milyute E., Milyus A. 2023. Vortex Dynamics of Substance in an Isolated Spheroidal Vortex and its Relationship with a Charge, *Deutsche internationale Zeitschrift für zeitgenössische Wissenschaft*, 48:29–35 .

⁴Tyrimus finansavo iš autorių lėšų.

Racionalaus argumento aritmetinių funkcijų žiedas

Vilius Stakėnas

Vilniaus universitetas

Racionalaus argumento aritmetinės funkcijos interpretuojamos kaip daliklių su svoriais sumos:

$$f(r) = \sum_{d|r} w(d).$$

Apibrėžiami racionaliųjų skaičių poabių logaritminiai tankiai. Įrodoma, kad jei $w(d) \geq 0$, tai poabių $\{r : f(r) \geq z\}$ asimptotiniai tankiai egzistuoja.

Apie Rymano dzeta funkcijos funkcinį nepriklausomumą

Darius Šiaučiūnas

Vilniaus universitetas

Dar XIX a. pabaigoje Hiolderis (Hölder) [1] straipsnyje įrodė, kad Oilerio (Euler) gama funkcija netenkina jokios algebrinės-diferencialinės lygties. Hilbertas (Hilbert) [2] straipsnyje iškėlė hipotezę, kad tą pačią savybę turi ir Rymano dzeta-funkcija

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Hilberto hipotezę [3] straipsnyje patvirtino Ostrovskis (Ostrowski). Rusų matematikas Voroninas (Voronin), žr. [4], įrodė funkcijos $\zeta(s)$ funkcinį nepriklausomumą, t. y., jeigu $F_0, F_1, \dots, F_m : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ yra tolydžiosios funkcijos, o lygybė

$$\sum_{l=0}^m s^l F_l(\zeta(s), \zeta'(s), \dots, \zeta^{(N-1)}(s)) = 0$$

yra teisinga su visais $s \in \mathbb{C}$, tuomet $F_l \equiv 0$ su visais $l = 0, 1, \dots, m$.

Pranešime bus pristatytas Rymano dzeta funkcijos jungtinis funkcinis nepriklausomumas. Tegul $N = N_1 + \dots + N_r$.

Teorema. *Tarkime, kad $F_0, F_1, \dots, F_m : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ yra tolydžiosios funkcijos, o lygybė*

$$\sum_{l=0}^m (s_1 \cdots s_r)^l \times F_l(\zeta(s_1), \zeta'(s_1), \dots, \zeta^{(N_1-1)}(s_1), \dots, \zeta(s_r), \zeta'(s_r), \dots, \zeta^{(N_r-1)}(s_r)) = 0$$

yra teisinga su visais s_1, \dots, s_r . Tuomet $F_l \equiv 0$ su visais $l = 0, 1, \dots, m$.

Literatūra

- [1] Hölder, O. 1887. Über die Eigenschaft der Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen. *Math. Ann.* 28:1–13.
- [2] Hilbert, D. 1902. Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 8(10):437–479.
- [3] Ostrowski, A. 1920. Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen. *Math. Z.* 8:241–298.
- [4] Voronin, S. M. 1975. The functional independence of Dirichlet L -functions. *Acta Arith.* 27:493–503.

Pirminės funkcijos

Raivydas Šimėnas, Ramūnas Garunkštis

Vilniaus universitetas

Pagrindinė aritmetikos teorema nusako svarbią natūraliųjų skaičių savybę: kiekvienas natūralusis skaičius vieninteliu būdu užrašomas pirminių skaičių sandauga. Galima apibrėžti panašų išskaidymą meromorfinių funkcijų aibėje, tik škart funkcijų kompozicijos prasme.

Tarkime, f yra meromorfinė funkcija, tenkinanti

$$f = g \circ h \tag{1}$$

su g meromorfinė ir h sveikąja arba h meromofine ir g racionaliąja. Tuomet išraiška (1) vadinama funkcijos f *dekompozicija*. Jei visoms f dekompozicijoms g arba h yra tiesinė funkcija, tai f vadinama *pirmine*.

Savo pranešime nagrinėsiu sąlygas, kurioms esant funkcijos, priklausansčios išplėstinei Selbergo klasei, yra pirminės. Taip pat aptarsiu rezultatą, kad Hurvico dzeta funkcija yra pirminė.

Literatūra

- [1] Dundulis, M., Garunkštis, R., Karikovas, E. and Šimėnas, R. 2023. Hurwitz zeta function is prime. In: *Mathematics* 11(5).

Jungtinis periodinių dzeta funkcijų universalumas

Monika Tekorė

Vilniaus universitetas

Tegul $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ žymi periodinę kompleksinių skaičių seką, kurios periodas q , o $s = \sigma + it$ – kompleksinį kintamąjį. Periodinė dzeta funkcija $\zeta(s; \mathbf{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute $\zeta(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s}$ ir turi meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą.

Taip pat tarkime, kad seka \mathbf{a} yra multiplikatyvioji, t. y., kad $a_{mn} = a_m a_n$ su visais $(m, n) = 1$ ir $a_1 = 1$. Straipsnyje [2] yra įrodyta, kad funkcija $\zeta(s; \mathbf{a})$ yra universali. Tai reiškia, kad jos postūmiai $\zeta(s + i\tau; \mathbf{a})$, $\tau \in \mathbb{R}$, aproksimuoja plačią analizinių funkcijų klasę.

Pranešime pristatysime periodinių dzeta funkcijų su multiplikatyviais koeficientais jungtinio universalumo teoremas. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, \mathcal{K} žymi juostos D kompaktinių aibių su jungiaisiais papildiniais klasę, o $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, – tolydžiųjų, neįgyjančių nulių aibėje K ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasę. $U_1(T_0)$ žymėkime didėjančių iki $+\infty$, tolydžiai diferencijuojamų funkcijų $\gamma(\tau)$ ir intervale (T_0, ∞) turinčių tokią monotonišią išvestinę $\gamma'(\tau)$, kad $\gamma(2\tau) \max_{\tau \leq u \leq 2\tau} (\gamma'(u))^{-1} \ll \tau$, kai $\tau \rightarrow \infty$, klasę. Tuomet yra teisinga teorema.

Teorema. [3]. *Tarkime, kad sekos $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ yra multiplikatyvios, a_1, \dots, a_r yra realieji algebriniai skaičiai tiesiškai nepriklausomi virš \mathbb{Q} , o $\gamma(\tau) \in U_1(T_0)$. Kai $j = 1, \dots, r$, tegul $K_j \in \mathcal{K}$, o $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + ia_j \gamma(\tau); \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Taip pat bus pristatytas aproksimavimas postūmiais $(\zeta(s + i\gamma_1(\tau); \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s + i\gamma_r(\tau); \mathbf{a}_r))$. Šiuo atveju reikalaujame, kad funkcijos $\gamma_j(\tau)$ tenkintų sąlygą $\gamma_j(\tau) = \hat{\gamma}_j(\tau)(1 + o(1))$, čia $\hat{\gamma}_j(\tau) = o(\hat{\gamma}_{j_0}(\tau))$ su kuriuo nors j_0 .

Be to, aptarsime jungtinį diskretųjį analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais $(\zeta(s + ih_1 \gamma_k; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s + ih_r \gamma_k; \mathbf{a}_r))$, čia $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\gamma_k > 0$, yra Rymano dzeta funkcijos netrivialiųjų nulių menamųjų dalių seka.

Šie rezultatai išplečia [1] straipsnyje gautus rezultatus.

Literatūra

- [1] Laurinčikas, A. and Macaitienė, R. 2009. On joint universality for periodic zeta-functions. *Mathematical Notes* 85:51–60.
- [2] Laurinčikas, A. and Šiaučiūnas, D. 2006. Remarks on the universality of the periodic zeta-function. *Mathematical Notes* 80:532–538.
- [3] Laurinčikas, A. and Tekorė, M. 2020. Joint universality of periodic zeta-functions with multiplicative coefficients. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 25:860–883.

Konforminė Bennett'o mechanizmo orbitų klasifikacija

Severinas Zubė, Rimvydas Krasauskas, Margarita Beniušė

Vilniaus universitetas

Bennett'o kreivės apibrėžiamos kaip orbitos taškų, kurie pritvirtinti prie Bennet'o mechanizmo [1]. Tai yra erdvinės racionalios 3 arba 4 laipsnio kreivės, natūraliai apibrėžiamos kaip Dupin'o arba Darboux ciklidžių parametrizacijų įstrižaininės kreivės. Atskiru atveju Dupin ciklidės gali liestis išilgai bendros pagrindinės įstrižainės, kuri yra Bennett'o kreivė. Konforminė (arba Moebius'o) Bennett'o kreivių klasifikacija gaunama suvedant jos parametrizaciją į kanoninę formą, priklausančią nuo dviejų kampų:

- α yra maksimalus kampas tarp dviejų liestinių vektorių išilgai kreivės;
- β yra analogiškas maksimumas, bet apskaičiuotas lokaliais specialaus judančio reperio koordinatėse.

Kinematiškai interpretuojant [2] Bennett'o kreives kaip 2d plokščių Study kvadrikės pjūvių orbitas, ganama jiems dualių 4d plokščių pjūvių konforminė klasifikacija.

Literatūra

- [1] G. T. Bennett, *A New Mechanism*, Engineering vol. 76. (1903), 777–778.
- [2] R. Krasauskas, S. Zube, *Kinematic interpretation of Darboux cyclides*, CAGD, 83 (2020).

Jungtinis universalumas Selbergo-Štoidingo klasėje

Brigita Žemaitienė

Vilniaus universitetas

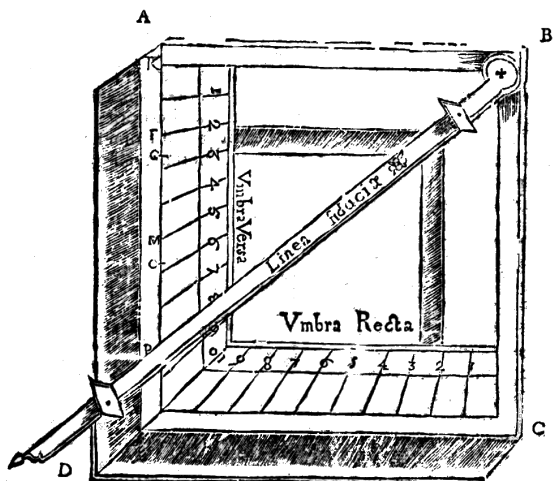
Dzeta ir L funkcijų universalumo klausimas iki šiol yra vienas iš įdomiausių ir daugiausiai nagrinėjamų analizinėje skaičių teorijoje. Tuo labiau, kad galima nagrinėti ne tik atskiras funkcijas, bet ir plačias jų klases. Viena iš tokių klasių yra Selbergo-Štoidingo klasė \tilde{S} . Ji yra sudaryta iš Selbergo klasei \mathcal{S} priklausančių funkcijų, kurios papildomai tenkina reikalavimą susijusį su pirminių skaičių pasiskirstymu. Priminsime, kad pati klasė \mathcal{S} apibrėžiama aksiomatiškai: sudaryta iš Dirichlė eilučių, kurios tenkina Ramanudžano hipotezę, yra analiziškai pratęšiamos, turi funkcinę lygtį ir yra multiplikatyvios.

Pranešime pristatysime jungtinę universalumo teoremą L funkcijoms iš \tilde{S} klasės. Ji teigia, kad analizinių funkcijų rinkinį aproksimuojant funkcijų $L(s+ia_1\tau), \dots, L(s+ia_r\tau)$ postūmiais gaunama aibė yra begalinė, o jos apatinis tankis bei su tam tikra išimtimi tankis yra teigiami. Teoremoje yra reikalaujama, kad algebriniai skaičiai a_1, \dots, a_r būtų tiesiškai nepriklausomi virš \mathbb{Q} . Šis rezultatas yra įrodytas [1].

Literatūra

- [1] Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A., Žemaitienė, B. 2023. Joint universality in the Selberg-Steuding class. *Mathematics* 11, 737. <https://doi.org/10.3390/math11030737>.

Diferencialinēs lygtys ir skaičiavimo metodai



Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio su Noimano ir dvitaške nelokalija sąlyga spektrinės kreivės

Kristina Bingele[†], Artūras Štikonas[‡]

[†] VilniusTech universitetas

[‡] Vilniaus universitetas

Apibrėžkime intervale $[0, 1]$ diskrečiuosius tinklelius $\varpi^h = \{t_j = jh, j = 0, \dots, n\}$, $\varpi_{1/2}^h = \{t_{j+1/2} = (t_j + t_{j+1})/2, j = -1, \dots, n\}$ su tinklo žingsniais h ir $h_{j+1/2} = t_{j+1/2} - t_{j-1/2}$, atitinkamai. Funkcijoms $U_j = U(t_j)$ apibrėžiamas antrosios išvestinės diskretusis analogas

$$(\delta^2 U)_j = \frac{(\delta U)_{j+1/2} - (\delta U)_{j-1/2}}{h_{j+1/2}} = \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$
$$(\delta^2 U)_0 = \frac{(\delta U)_{1/2} - (\delta U)_{-1/2}}{h_{1/2}} = \frac{U_1 - U_0}{h} - (\delta U)_{-1/2},$$

čia $(\delta U)_{j+1/2} := \frac{U_{j+1} - U_j}{h}$, $j = 1, \dots, n-1$.

Pranešime nagrinėjamas diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio su Noimano ir dvitaške nelokalija sąlyga:

$$-\delta^2 U = \lambda U, \quad t \in \omega^h,$$
$$(\delta U)_{j=-1/2} = 0, \quad U_n = \gamma U_m,$$

spektrinės kreivės, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\xi = mh, 0 < m < n$.

Literatūra

- [1] Bingele K. 2019. Investigation of Spectrum for a Sturm–Liouville problem with Two-Point Nonlocal Boundary Conditions. PhD thesis, Vilnius University.
- [2] Bingele K., Bankauskienė A., Štikonas A. 2019. Spectrum Curves for a discrete Sturm–Liouville problem with one integral boundary condition. *Nonlinear Anal. Model. Control.* **24**(5):755–774.
- [3] Bingele K., Bankauskienė A., Štikonas A. 2020. Investigation of Spectrum Curves for a Sturm–Liouville problem with Two-Point Nonlocal Boundary Conditions. *Math. Model. Anal.* **25**(1):53–70.

Navjė ir Stokso lygtys plonose struktūrose⁵

Rita Juodagalvytė[†], Grigory Panasenko^{†,‡}, Konstantinas Pileckas[†]

[†] Vilniaus universitetas

[‡] Jean Monnet universitetas

Navjė ir Stokso lygtys aprašo skysčių tekėjimą įvairiose srityse. Hemodinamikos motyvuoti uždaviniai siekia supaprastintai aprašyti skysčių tekėjimą žmogaus kūne. Būtent plonos struktūros naudojamos aprašyti kraujagyslių tinklus ir kurti supaprastintus kraujo tekėjimo modelius. Pranešime bus pristatomi Navjė ir Stokso uždaviniai plonose struktūrose, kurie leidžia sukurti supaprastintą kraujo tekėjimo modelį smulkiose kraujagyslėse (žr. [1],[2]).

Literatūra

- [1] R. Juodagalvytė, G. Panasenko, K. Pileckas, Time periodic Navier–Stokes equations in a thin tube structure, *Boundary Value Problems* **2020**(1), 1–35 (2020). <https://doi.org/10.1186/s13661-020-01334-3>
- [2] R. Juodagalvytė, G. Panasenko, K. Pileckas, Steady-state Navier–Stokes equations in thin tube structure with the Bernoulli pressure inflow boundary conditions: Asymptotic analysis, *Mathematics* **9**(19), 1–20 (2021). <https://doi.org/10.3390/math9192433>

⁵R. Juodagalvytės mokslinius tyrimus rėmė Liono universitetas pagal programą LABEX MILYON (ANR-10-LABX-0070) kartu su Prancūzijos nacionaline tyrimų agentūra pagal programą "Investiments d'Avenir" (ANR-11-IDEX-0007). Tyrimas iš dalies finansuotas iš Europos socialinio fondo (projekto Nr. 09.3.3-LMT-K-712-01-0012) pagal dotacijos sutartį su Lietuvos mokslo taryba (LMTLT).

Metanolio sintezės iš anglies monoksido ir vandenilio kompozitinio katalizatoriaus paviršiuje modelis

Pranas Katauskis, Vladas Skakauskas

Vilniaus universitetas

Nagrinėjamas anglies monoksido (CO) ir vandenilio (H_2) reakcijos, vykstančios kompozitinio katalizatoriaus [1] paviršiuje ir kurios produktas yra metanolis ($P = CH_3OH$), matematinis modelis. Modelį sudaro susietos dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos. Dalis dalinių išvestinių diferencialinių lygčių nagrinėjamos srityje, kita dalis sprendžiama dalyje srities paviršiaus. Jos apibrėžia diferencialinių lygčių, sprendžiamų srityje, neklasikinės kraštinės sąlygas ir aprašo reagentų adsorbiciją, desorbiciją, adsorbatų difuziją nehomogeniniame paviršiuje ir paviršines reakcijas bei reakcijos produktų desorbiciją ir jų reabsorbiciją iš srities. Difuzijai srityje ir paviršinei difuzijai aprašyti taikomi Fiko dėsnis ir Gorban ir kt. [2] dalelių šuolių mechanizmas. Atsižvelgiama į spiloverio efektą ir užrašytos neklasikinės jungtinumo sąlygos aktyvios ir neaktyvios katalizatoriaus dalių sandūroje. Diferencialinis uždavinys sprendžiamas naudojant konservatyvią skirtuminę schemą. Tiriama reagentų pradinė koncentracija, reakcijos greičio konstantų ir dalelių šuolių per katalizatoriaus dalių sandūrą greičio konstantų įtaka katalitiniam reaktyvumui.

Literatūra

- [1] Cwiklik, L., Jagoda-Cwiklik, B. and Frankowicz, M. 2005. Influence of the spacing between metal particles on the kinetics of reaction with spillover on the supported metal catalyst. *Applied Surface Science* 252:778–783.
- [2] Gorban, A. N., Sargsyan, H. P. and Wahab, H. A. 2011. Quasichemical models of multi-component nonlinear diffusion. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* 6:184–262.

Inverse problem for the heat equation with energy condition

Kristina Kaulakytė, Konstantinas Pileckas

Vilnius University

The talk considers the inverse problem for the non-stationary heat equation in a bounded simply connected domain with a specific over-determination condition. The existence of a very weak solution is proved. This is the first step for studying the solvability of the Stokes problem with the prescribed kinetic energy. The motivation for such problems comes from the recent paper of T. Buchmaster and V. Vicol (see [1]).

References

- [1] Buckmaster, T. and Vicol, V. 2019. Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation. *Annals of Mathematics* 189 (1):101–144.

Blood velocity computation inside of a human heart left atrium appendage

Nikolajus Kozulinas, Sigitā Aidietienė, Audrius Aidietis, Oleg Ardatov, Sergejus Borodinas,
Rimgaudas Katkus, Kristina Kaulakytė, Grigory Panasenko, Konstantinas Pileckas

Vilnius University

The talk is devoted to the numerical study of the Navier-Stokes equations in patient-specific geometry of the human heart left atrium. During atrial fibrillation, the left atrium and left atrium appendage (LAA) play a very important role in thrombogenesis. In the opinion of cardiologists, the reason of thrombogenesis is stagnation of blood flow in some parts of LAA, which likely depends on its geometry. Numerical solutions of the Navier-Stokes equations give a real patient blood flow velocity inside of LAA and detect the stagnation zones. The obtained results could help to prepare for surgical treatment and to make a conclusion about whether anticoagulants must be prescribed.

Skirtuminės schemos netiesinei elipsinei lygčiai su integraline kraštine sąlyga konvergavimas

Kristina Pupalaigė[†], Regimantas Čiupaila[‡], Gailė Kamilė Šaltenienė[‡], Mifodijus Sapagovas[‡]

[†] Kauno technologijos universitetas

[‡] Vilniaus Gedimino technikos universitetas

[‡] Vilniaus universitetas

Nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x, y, u), \quad (x, y) \in \Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \\ u(x, 0) &= \mu_1(x), \quad u(x, 1) = \mu_2(x), \quad u(0, y) = \mu_3(y) \\ u(1, y) &= \gamma \int_{\xi}^1 u(x, y) dx + \mu_4(y),\end{aligned}$$

kur ξ ir γ yra realieji parametrai ir $\xi \in [0, 1]$, $\gamma \in (-\infty, \infty)$.

Išnagrinėta, su kokiomis parametru ξ ir γ reikšmėmis skirtuminių lygčių sistemos matrica yra M-matrica. Taikant M-matricų teorijos rezultatus, surastos iteracinių metodų netiesinių skirtuminių lygčių sistemai spręsti konvergavimo sąlygos. Pagrindinis rezultatas – sukonstruota mažorantė funkcija ir įrodytas baigtinių skirtumų metodo konvergavimas.

Literatūra

- [1] K. Bingelė, and A. Bankauskienė, and A. Štikonas. Spectrum curves for a discrete Sturm-Liouville problem with one integral boundary condition. *Nonlin. Anal. Model. Control.* 24. 755–744, 2019.
- [2] M. Sapagovas, O. Štikonienė, K. Jakubėlienė, R. Čiupaila. Finite difference method for boundary value problem for nonlinear elliptic equation with nonlocal conditions. *Bound. Value Probl.* 2019. (94):1–16, 2019.
- [3] K. Pupalaigė, and M. Sapagovas, and R. Čiupaila. Nonlinear elliptic equation with non-local integral boundary condition depending on two parameters. *Math. Model. Anal.* 27. (4), 610–628, 2022.

Diskrečiosios Šturmo ir Liuvilio lygties sprendiniai

Artūras Štikonas

Vilniaus universitetas

Pranešime nagrinėjami diskrečiojo uždavinio

$$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + \lambda U_j = 0, \quad j \in \mathbb{Z},$$

sprendiniai, kai $\lambda \in \mathbb{C}$.

Išrašomi įvairūs bendrojo sprendinio pavidalai panaudojant Čebyševio pirmojo ir antrojo tipo polinomus. Surandamos bendrojo sprendinio išraiškos per trigonometrines funkcijas. Nagrinėjamos kompleksinio parametro λ išraiškos keičiant kompleksinį kintamąjį ir parodoma kaip keičiasi bendrojo sprendinio pavidalas.

Kaip pavyzdys pateikiamas Šturmo ir Liuvilio uždavinys su Noimano kraštine sąlyga ir užrašomas jo tikrinių funkcijų pavidalas.

Literatūra

- [1] Snyder M.A. 1966. *Chebyshev Methods in Numerical Approximation*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J..
- [2] Samarskii A.A. and Nikolaev E.S. 1989. *Numerical Methods for Grid Equations*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin. (Vol. I, *Iterative Methods*; Vol. II, *Direct Methods*)
- [3] Mason J.C. and Handscomb D.C. 2003. *Chebyshev Polynomials*. Chapman&Hall/CRC, Basel, Boston, Berlin.
- [4] Bingelė K., Bankauskienė A., Štikonas A. 2019. Spectrum Curves for a discrete Sturm–Liouville problem with one integral boundary condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*. **24**(5):755–774.

Baigtinių skirtumų schema dvimatei elipsinei lygčiai su dvilypiu integralu nelokaliojoje sąlygoje

Olga Štikonienė, Mifodijus Sapagovas

Vilniaus universitetas

Pranešime nagrinėjama baigtinių skirtumų schema aproksimuojanti dvimatį kraštinį netiesinį uždavinį Puasono lygčiai su nelokaliąja kraštine sąlyga, aprašoma dvilypiu integralu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u), \quad (x, y) \in \Omega = \{0 < x, y < 1\},$$
$$u|_{\partial\Omega} = \iint_{\Omega} K(x, y)u(x, y)dx dy.$$

Pagrindiniai mūsų tikslai yra baigtinių skirtumų schemos konvergavimo ir iteracinių metodų tyrimas netiesinių skirtumų lygčių sistemoms.

Naudojant kai kuriuos teorinius rezultatus [1, 2], tirėme atitinkamo diskrečiojo uždavinio tikrinių reikšmių uždavinio spektro struktūrą.

Literatūra

- [1] Y. Lin, S. Xu. Finite difference approximation for a class of non-local parabolic equations, *Internat. J. Math. & Math. Sci.* **20**(1):147–164, 1997.
- [2] Y. Wang. Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2002** (05):1–16, 2002.

Numerical analysis of a FDM solution to a fluid-structure interaction problem

Vytenis Šumskas, Kristina Kaulakytė, Nikolajus Kozulinas, Grigory Panasenko

Vilnius University

A fluid-structure interaction model based on [1] was derived together with team members and is briefly presented in this talk. It couples two media with different physical characteristics. For example, it can be used to model blood flow in a small human arteriole or motor oil flow in a long, elastic pipe. Among some important aspects of this model, the inclusion of elasticity and viscosity of both media is stressed out.

In particular, a problem modelling blood flow in a small elastic arteriole is the main concern of this talk. By analysing the speed of blood flow averaged over cross-sections of the vessel, we get a 4th order PDE of the following form:

$$c_1 Q_{tt} + c_2 Q_{xxtt} + c_3 Q_t + c_4 Q_{xxt} + c_5 Q_{xxx} + c_6 Q_{xx} + c_7 Q = 0,$$

here Q is the averaged speed and coefficients c_i include physical characteristics of the model, such as the radius of tube, elastic tube thickness, density of the elastic medium, etc.

The main focus here is on some numerical aspects of the solution to the presented PDE problem. Namely, two schemes of different orders of accuracy are presented to solve it numerically. Their accuracies in time and space are analysed. The stability of proposed numerical schemes is investigated. Results of some interesting numerical tests are discussed to confirm the accuracy of constructed solvers.

The model is implemented for a single pipe geometry and for a Y-shaped network of vessels. Numerical results are compared with the full Navier-Stokes simulations. Numerical experiments confirm that the proposed ansatz is effectively applicable for a broad class of problems.

References

- [1] Panasenko, G. P. and Stavre. 2020. Three Dimensional Asymptotic Analysis of an Axisymmetric Flow in a Thin Tube with Thin Stiff Elastic Wall. *J. Math. Fluid Mech.* 22(20).

Apie Fučiko uždavinio su Samarskio ir Bitsadzės nelokaliaja sąlyga spektrą

Sigita Urbonienė[†], Natalija Sergejeva[‡]

[†] Vytauto Didžiojo universitetas

[‡] Latvijos gyvybės mokslų ir technologijų universitetas

Nagrinėkime Fučiko lygtį su viena klasikine, o kita nelokaliaja Samarskio ir Bitsadzės tipo kraštine sąlyga

$$-x'' = \mu x^+ - \lambda x^-, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(\xi) = 0, \quad (2)$$

$$x(\eta) = 0, \quad x(1) = 0 \quad (3)$$

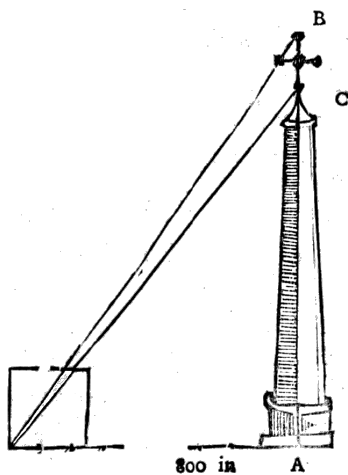
su parametrais $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in (0, 1]$, $\eta \in [0, 1)$.

Fučiko uždavinio su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis spektras yra išsamiai ištirtas, tačiau uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis spektras gali gerokai skirtis nuo klasikinio uždavinio spektro. Pranešime bus pristatoma (1), (2) ir (1), (3) uždavinių spektrų savybių priklausomybė nuo kraštinių sąlygų parametrų ξ ir η reikšmių, bei savybių palyginimas su klasikiniu Fučiko uždavinio spektro savybėmis.

Literatūra

- [1] N. Sergejeva. 2013. The regions of solvability for some three point problem. *Math. Model. Anal.*, 18(2): 191–203.
- [2] N. Sergejeva. 2019. On some Fučik type problem with nonlocal boundary condition. *Proc. of IMCS of University of Latvia*, 19: 57–64.
- [3] A. Kufner, S. Fučík. 1980. *Nonlinear Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier.

Matematikos istorija ir didaktika



Trikampių masyvų klasės skaičių problemos

Igoris Belovas

Vilniaus universitetas

Trikampių masyvų klasės skaičiai, apibrėžiami pirmosios eilės tiesine dviejų kintamųjų skirtuminę lygtimi su tiesiniais koeficientais, apima platų kombinatorinių skaičių šeimų spektrą: binominius koeficientus, Morgano skaičius, Stirlingo pirmosios ir antrosios rūšių skaičius, necentrinius Stirlingo skaičius, Eulerio skaičius, Laho skaičius, ir jų apibendrinius. Darbe yra išvedama trikampių masyvų klasės skaičių bendroji analizinė išraiška, bei siūlomos problemos (kaip lavinančios atitinkamą įrodymų techniką ir matematinį aparatą, taip ir dar neišspręstos) studijuojantiems matematikos ir informatikos kryptių studijų programose esančius tikimybių teorijos ir analizinės kombinatorikos dalykus bakalaurams. Kai kurie dar neišspręsti uždaviniai gali būti panaudoti ir kaip baigiamųjų darbų pagrindai.

Literatūra

- [1] Belovas, I. 2020. Centrinė ribinė teorema trikampių masyvų klasės skaičiams, asocijuotiems su Ermito daugianariais. *Lietuvos matematikos rinkinys*. Ser. B, 61: 1–7.
- [2] Belovas, I. 2021. Limit theorems for numbers satisfying a class of triangular arrays. *Glasnik Matematički*, 56 (2): 195–223.
- [3] Belovas, I. 2022. Central limit theorems for combinatorial numbers associated with Laguerre polynomials. *Mathematics*, 10 (6:865): 1–18.
- [4] Kyriakoussis, A. 1984. A central limit theorem for numbers satisfying a class of triangular arrays. *Discrete Mathematics*, 51: 41–46.
- [5] Louchard, G. 2010. Asymptotics of the Stirling numbers of the first kind revisited: A saddle point approach. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 12 (2): 167–184.
- [6] Louchard, G. 2013. Asymptotics of the Stirling numbers of the second kind revisited. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 7 (2): 193–210.
- [7] Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F. and Moussiaux, A. 2002. *Handbook of first-order partial differential equations*. CRC Press, London.
- [8] Platonov, M. L. 1979. *Combinatorial numbers of mapping class and their applications*. Science, Moscow.

Matematiką besimokančio mokinio perspektyva: nerimas ir viltis

Monika Grigaliūnienė

Vytauto Didžiojo universitetas

Matematinės žinios siejamos su kritinio ir analitinio mąstymo, kūrybiško problemų sprendimo, efektyvaus informacijos apdorojimo, samprotavimo ir argumentavimo gebėjimais [4], tačiau nepaisant akivaizdžios šių gebėjimų naudos, tarp visų amžiaus grupių yra plačiai paplitęs neigiamas požiūris į matematiką [3], netgi nerimas dėl bet kokie susidūrimo su matematika [2]. Pozityvus besimokančiojo požiūris lemia geresnius jo mokymosi rezultatus [1], todėl svarbu suprasti, kaip jaučiasi matematiką besimokantys mokiniai, kaip jie supranta matematikos mokymąsi ir kokie yra jų lūkesčiai. Pranešime pristatoma fokusuotos grupės interviu analizė. Tyrime dalyvavo penki Lietuvos vyresniųjų klasių mokiniai ir moderatorė. Tyrimo tikslas buvo atskleisti mokiniams iššūkius keliančias temas ir galimas to priežastis. Atlikus tyrimą išaiškėjo iššūkių mokiniams keliančios temos, kurių pagrindinė – trupmeniniai skaičiai ir veiksmai su jais. Interviu dalyviai akcentavo ankstesnes mokymosi patirtis, turimas nuostatas, emocinius-psichologinius iššūkius, santykį su mokytoju kaip svarbius, jų mokymuisi darančius didelę įtaką, veiksnius.

Literatūra

- [1] Chen, L., Bae, S. R., Battista, C., Qin, S., Chen, T., Evans, T. M. and Menon, V. 2018. Positive Attitude Toward Math Supports Early Academic Success: Behavioral Evidence and Neurocognitive Mechanisms. *Psychological Science*, 29(3).
- [2] Fiss, A. 2020. *Performing Math: A History of Communication and Anxiety in the American Mathematics Classroom*. Rutgers University Press.
- [3] Munawar, S. 2021. Hate for Mathematics: An explorative multiple case study into why some people develop a hate for mathematics.
- [4] Niss, M. A. and Jablonka, E. 2014. Mathematical Literacy. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2014). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_100.

Comparison of “What numbers make sense?” problems solving in Czech Republic and Lithuania

Ieva Kilienė[†], Karolína Mottlová[‡]

[†] Vilnius University

[‡] Charles University

The aim of the paper is to present the impact of an innovative approach to solving word problems on fifth-grade students in the Czech Republic and Lithuania. Unlike typical word problems that can be solved by merely extracting numerical data and question words, the approach used in this study involves "What numbers make sense" word problems that demand a deeper understanding of the story of the problem. The purpose of this research study was to assess pupils' mathematical reasoning, argumentation skills, and attention to linguistic limitations.

Atnaujintos matematikos bendrosios programos diegimas: mokymo metodų aspektas, ugdant matematinio komunikavimo kompetenciją

Violeta Kravčenkienė, Bronė Narkevičienė

Kauno technologijos universitetas

Matematinio komunikavimo gebėjimai yra dalis matematinių gebėjimų, kurie yra būtini perteikiant, įgyjant, įtvirtinant ir naudojant matematikos žinias. Gebėjimas dalintis informacija ir ją priimti yra būtini matematikos supratimui.

Tyrimo tikslas – išanalizuoti matematinio komunikavimo ugdymo tyrimus, siekiant atrinkti efektyviausius matematikos mokymo metodus šiai kompetencijai ugdyti.

Tyrimo objektas – matematinis komunikavimas ir jo ugdymas.

Tyrimo tikslui pasiekti iškelti tokie uždaviniai:

- 1) atlikti matematinio komunikavimo kompetencijos ugdymo tyrimų analizę;
- 2) aptarti matematikos mokymo metodus;
- 3) pateikti rekomendacijas mokymo metodų taikymui matematiniam komunikavimui ugdyti.

Naudoti **tyrimo metodai**: dokumentų analizė; mokslinės literatūros analizė; lyginamoji analizė.

Dešimtainės trupmenos ir dešimtainiai skaičiai

Ričardas Juozas Kudžma

Vilniaus universitetas

Trumpai apžvelgsime, kaip pasikeitė dešimtainės trupmenos supratimas per 100 metų. Antanas Smetona [4] rašė: “Dešimtainėmis trupmenomis vadiname tokias trupmenas, kurių vardikliai išreikšti vienetu su nuliais, tariant, yra dešimties laipsniai”.

Panašiai rašoma ir TEV 2002 m. vadovėlyje [3] (darbo vadovas Vilius Stakėnas): “Trupmenos, kurių vardikliai yra dešimties laipsniai, vadinamos *dešimtainėmis*.” Bet toliau tekste dešimtainė trupmena sutapatinama tik su užrašu, išreikštu baigtiniu skaičiumi skaimenų su kableliu.

Dar po keletos metų 2005 vėl TEV leidyklos vadovėlyje [2] (darbo vadovas Valdas Vanagas) jau rašoma be užuolankų: “Trupmenas, kurių vardiklis yra 10, 100, 1000, ..., galima užrašyti be vardiklio, kableliu atskiriant sveikąją ir trupmeninę dalis. Taip užrašyta trupmena vadinama *dešimtaine*.”

Taip ir neaišku, $3/10$ dešimtainė trupmena, ar ji tokia tampa tik užrašius $0,3$? Problema išsprendžia dešimtainio skaičiaus sąvoka. Ji leidžia atskirti trupmenos, kuri išreiškiama dalybos simboliu “/”, ir dešimtainio skaičiaus, išreiškiamo skaitmenimis $0, 1, \dots, 9$ ir kableliu, sąvokas. Pateikiama apibrėžtis iš prancūziško 10 klasės vadovėlio [1]: “ d yra dešimtainis skaičius, jei egzistuoja sveikasis a ir natūralusis n (gali būti ir nulis) tokie, kad $d = a/10^n$ ”.

Taigi $3/10$ – trupmena (gali būti ir dešimtainė), $0,3$ – dešimtainis skaičius. Tai nėra tik termino pakeitimas. Dešimtainis skaičius – nauja, iki šiol nevertota (arba ribotai vertota) sąvoka. Pvz., $\frac{1}{2}$ tikrai nėra dešimtainė trupmena, bet tai yra viena iš daugelio dešimtainio skaičiaus išraiškų.

Literatūra

- [1] Beltramone, J. P., Boure, F., Léon, F., Merdy, C., Plas, C., Tosetti, R. 2019. *Déclic* 2^{de} *Maths*. Vanves: Hachette.
- [2] Butkevičienė, R., Knyvienė, J., Sičiūnienė, V., Stričkienė, M., Stundžienė, Ž., Vanagas, V. 2005. *Matematika tau, 5 klasė, 2 dalis*. Vilnius, TEV
- [3] Intienė, K., Skūpas, A., Stakėnas, V., Stankus, E., Vitkus, V. 2002. *Matematika* 11, I *dalis*. Vilnius, TEV.
- [4] Smetona, A. 1921. *Aritmetikos teorija*. Kaunas.

Hankelio matricos. Istorijos ir taikymų apžvalga

Mantas Landauskas

Kauno technologijos universitetas

Vokiečių matematikas Hermann Hankel (1839-1873) daugiausiai dirbo matematinės analizės šakoje. Moksliniai straipsniai ir knygos daugiausiai orientuoti į kompleksinių skaičių tyrimus ir geometriją. Mokslininko vardu pavadinta baigtinė arba begalinė matrica, kurios šalutinės įstrižainės yra pastovios. Tai tik vienas iš keleto galimų apibrėžimų.

Dar prieš Hankelio matricos termino atsiradimą, tokios matricos buvo jau nagrinėjamos, tik turėjo kitą pavadinimą: nepilna matrica (angl. *catalecticant matrix*). Tai tikslus vertimas, kuris yra itin bendras mūsų kalboje. Šį terminą 1852 m. įvedė britų matematikas James Joseph Sylvester (1814-1897), o tai nutiko 5 metais anksčiau, nei H. Hankel įstojo į universitetą [1]. Termino ištakos yra poezija ir tamprai J. J. Sylvester sąsaja su ja.

Istoriškai Hankelio matrica iš pradžių buvo naudojama skaičių ir invariantų teorijose. Atskiras jos atvejais, Hilberto matrica, 1894 m. panaudota aproksimavimo teorijoje. Vėliau mokslinėje literatūroje atsirado ir platesnių taikymų, su kuriais, atskirais atvejais, atsirado ir naujų šios matricos terminų (ortosimetrinė, persimetrinė). Tačiau šie terminai sutinkami rečiau.

Plačiau taikymuose yra naudojama Hankelio matricos rango minimizavimo problema. Visų pirma, sistemų identifikavimo uždaviniuose. Taip pat laiko eilučių stochastinių modelių radimo ar kituose uždaviniuose. Artimi taikymai sutinkami netiesinėje dinamikoje, pvz. vertinant skaičių sekų kompleksiskumą. Taikymai šiose šakose lėmė ženklus dėmesio skyrimą matricų rango vertinimui pasitelkiant SVD dekompoziciją ir su tuo susijusių problemų nagrinėjimui. Tokia plati taikymų gama sutinkama tiek teorijoje, tiek praktikoje.

Atskirai verta paminėti Hankelio matricos naudojimą trūkstamų duomenų mokslų atkūrimui, triukšmo mažinimui vaizdo ar kitam signale ir panašiuose duomenų duomenų uždaviniuose [2]. Pirmosios idėjos pasirodė tik šio šimtmečio pradžioje, tačiau taikymai jau spėjo paliesti įvairiausias sritis. Tai aktyvi naujausių mokslinių publikacijų šaka.

Galima pastebėti, kad šiandieną apie pusę Hankelio matricių naudojimo mokslinėje literatūroje sudaro sistemų identifikavimo ar netiesinės dinamikos uždaviniai. Duomenų mokslu uždaviniai sudaro iki dešimtadalio mokslinės produkcijos.

Literatūra

- [1] Sylvester, J. J. 1852, On the principles of the calculus of forms, Cambridge and Dublin Mathematical Journal vol. VII 52-97 and also 179–217.
- [2] Nguyen, L.T., Kim, J. and Shim, B., 2019. Low-rank matrix completion: A contemporary survey. IEEE Access, 7, pp.94215-94237.

sites.google.com/view/Lapinskas – Kitokia matematika

Remigijus Lapinskas

Vilniaus universitetas

Anais laikais mokiniai nesiginčydamis mokėsi lotynų kalbos ir Euklido geometrijos. Dabar dėl programų, tame tarpe ir mokyklinės matematikos programos, diskusijos yra įprastas daiktas. Siūlau orientuotis į tai, kad

- matematika nėra mokslas apie skaičius
- matematika nėra lygčių sprendimas ar išvestinių skaičiavimas
- matematika tiria struktūras
- dauguma realiųjų funkcijų yra visuose taškuose netolydžios ir t.t.

Šis tekstas (jo internetinis adresas nurodytas pavadinime) atsirado iš autoriaus noro parašyti „Matematiką humanitarams“, bet berašant viskas apsisvertė aukštyn kojomis. Kurso tikslu tapo parodyti begalines platybes (na, maždaug mokyklinės programos ribose), kuriose gyvena matematika, numesti buitines smulkmenas ir išryškinti matematinių dėsningumų esmę, pašalinant rutininius skaičiavimus ir formulių kalimą. Dabar teisingiausia būtų šį tekstą pavadinti „Matematikos skaitiniais“. Teksto stilių galėtų iliustruoti skyriaus „Funkcijos išvestinė“ turinys:

- kas yra išvestinė
- ar tolydi funkcija diferencijuojama?
- funkcijos skleidimas Taylor'o eilute
- funkcijos nulių radimas Newton'o metodu
- funkcijos pokytis $\Delta f(x)$ ir diferencialas $df(x)$
- išspręskime vieną penktos eilės lygtį

Tekste dažnai naudojamos tiek asmeniniam kompiuteriui skirta programa R, tiek telefoninėmis aplikacijomis (Photomath, desmos, Maple Calculator, geogebra ir kt.) – skaičiavimas su pieštuku ar paprastu kalkuliatoriumi dažnai yra tiesiog laiko švaistymas. „Kitokioje matematikoje“ yra siūlomas kitoks požiūris į matematikos programą ir kitos priemonės uždaviniams spręsti ir kiti uždaviniai. Antra vertus, nemanau, kad šis tekstas galėtų tapti priemone šiandienos valstybiniam matematikos egzaminui ruošti. Jo tikslas – prašviesinti galvą ir pademonstruoti, kad verta mąstyti plačiau.

Įrodymai be žodžių

Edmundas Mazėtis[†], Grigorijus Melničenko[‡]

[†] Vilniaus universitetas

[‡] Vytauto Didžiojo universitetas

Paprastai matematinių teiginių įrodymuose figūruoja tiek algebriniai pertvarkymai, tiek loginiai samprotavimai. Bet yra matematinių teiginių, kurių teisingumas matomas iš pirmo žvilgsnio, kai yra tą įrodymą iliustruojantis brėžinys. Nors brėžiniu besiremiantys įrodymai nebūtinai būna pilni ir išsamūs, bet brėžinys padeda pastebėti faktus, kurie po to lengvai pagrindžiami algebros ir logikos pagalba. Straipsnyje pateikiami matematinių teiginių įrodymai, kai, idėmiai studijuojant brėžinį, pagrindinė įrodymo idėja matoma iš brėžinio, o pats įrodymas tampa gražus ir aiškus.

Literatūra

- [1] Claudi Alsina, Roger B. Nelsen *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*, MAA Press, 2006.
- [2] Roger B. Nelsen *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking*, MAA Press, 2020.

Matematikos didaktikos mokslas Lietuvoje: Quo vadis? 2023 m. *versus* 2018 m.

Bronė Narkevičienė

Kauno technologijos universitetas

Straipsnyje pateikiama matematikos didaktikos mokslo situacijos valstybiniame, socialiniame ir instituciniame lygmenyse kaitos per penkerių metų, nuo 2018 m. iki 2023 m., laikotarpį analizės rezultatai ir išvados - rekomendacijos.

Tyrimo tikslas – išanalizuoti, kaip pasikeitė matematikos didaktikos mokslo situacija Lietuvoje valstybiniu, socialiniu, instituciniu lygmenimis nuo 2018 metų iki 2023 metų. Atlikus tyrimą, pateikti išvadas - rekomendacijas.

Tyrimo objektas – matematikos didaktikos mokslas Lietuvoje.

Tyrimo tikslui pasiekti iškelti tokie uždaviniai:

- 1) išnagrinėti matematikos didaktikos mokslo Lietuvoje 2023 metų situaciją valstybiniu, socialiniu, instituciniu lygmenimis;
- 2) palyginti gautus rezultatus su rezultatais, kurie buvo gauti atlikus analogišką tyrimą 2018 metais;
- 3) pateikti išvadas – rekomendacijas.

Naudoti **tyrimo metodai:** dokumentų analizė [1], [2], [3]; mokslinės literatūros analizė [4]; LMT disertacijų duomenų bazės [5] analizė; statistinių duomenų apie švietimo, mokslo būklę ir jų kontekstinių rodiklių analizė [6]; Lietuvos universitetų ir mokslo institutų oficialiuose tinklalapiuose viešinamos informacijos analizė; lyginamoji analizė ir apibendrinimas.

Literatūra

- [1] Matematikos VBE rezultatai. <https://www.nsa.smm.lt/egzaminai-ir-pasiekimu-patikrinimai/brandos-egzaminai/rezultatu-analizes/>
- [2] Švietimo pažangos ataskaitos. <http://www.svis.smm.lt/pazangos-ataskaitos/>
- [3] 2023-2030 metų matematikos mokymo ir mokymosi gerinimo planas. https://smsm.lrv.lt/uploads/smsm/documents/files/aalaikini/Matematika_Planas.docx
- [4] Lietuvos matematikos rinkinys. A ir B serijos. 2018-2022. Vilniaus universitetas. <https://www.zurnalai.vu.lt/LMR>
- [5] Lietuvos mokslo tarybos disertacijų duomenų bazė. <https://db.lmt.lt/lt/perziura/disertacijos/d-db.html>.
- [6] <http://www.svis.smm.lt/rodikliai/>

Žymenų ir terminų naudojimas matematikos vadovėliuose

Rimas Norvaiša

Vilniaus universitetas

Aptarsime kai kurių žymenų ir terminų naudojimo praktikos ypatumus. Dažna žymenų problema – jų matematinio taisyklingumo trūkumai arba tuos pačius objektus reiškiančių žymenų įvairovė. Problemų sprendimas reikalauja pagrįsto balanso tarp matematinio tikslo ir besimokančiojo matematinės patirties trūkumo. Daugiausia diskusijų kelia funkcijos samprata ir jos žymėjimai.

Ar reikia mišriųjų skaičių?

Robertas Vilkas

Vilniaus Vytauto Didžiojo gimnazija

Aptariamos priežastys, dėl kurių reikėtų vengti naudoti mišriuosius skaičius vyresnėse klasėse. Taip pat pateikiami realūs mokinių kontrolinių darbų fragmentai, kuriuose matosi klaidos, kurios yra mišriųjų skaičių naudojimo pasekmė.

Mokyklinės matematikos terminų ir žymėjimų kritika

Robertas Vilkas

Vilniaus Vytauto Didžiojo gimnazija

Aptariami kai kurie mokykloje naudojami terminai ir žymėjimai. Pagrindinis akcentas yra laikytis tarptautinių matematikos žymėjimų.

Didėjančios funkcijos apibrėžimas

Robertas Vilkas

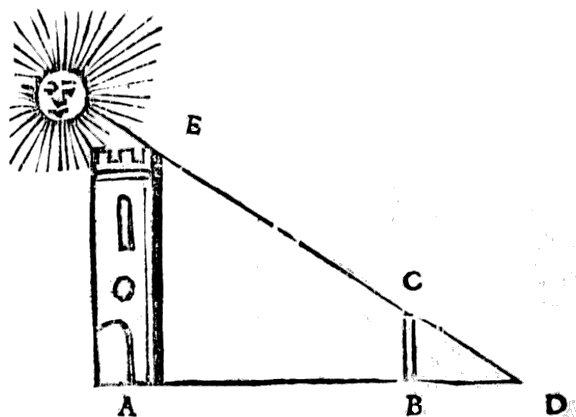
Vilniaus Vytauto Didžiojo gimnazija

Pateiktas bendras didėjančios funkcijos apibrėžimas, kurio lietuviškose knygose nėra, net ir angliškose knygose teko gerokai paieškoti, kol pavyko surasti (pvz. [3]). Taip pat pateikti analogiški apibrėžimai mažėjančios, nedidėjančios ar nemažėjančios funkcijos atveju. Aptartos kai kurios klaidos taikant šį apibrėžimą ir pateiktos rekomendacijos mokytojams, su pavyzdžiais.

Literatūra

- [1] Misevičius, E. 1998. *Matematinė analizė, 1 dalis*. Vilnius: TEV.
- [2] Kabaila, V. 1983. *Matematinė analizė, 1 dalis*. Vilnius: Mokslas.
- [3] Sohrab, H. H. 2014. *Basic Real Analysis*. New York: Birkhäuser.
- [4] Očan, J. S. 1965. *Sborník zadač i teorem po teorii funkcij deistvitelnovo peremennovo*. Moskva: Prosveščeniye.

Matematikos taikymai



Kognityvinių testų rezultatų analizė

Liepa Bikulčienė, Gintarė Baliūnaitė, Aušra Žvironienė

Kauno technologijos universitetas

Kognityviniai gebėjimai yra svarbus žmogaus fiziologinės būsenos aspektas, apimantis tokias žmogaus funkcines veiklos sritis kaip mąstymas, problemų sprendimas ar sprendimų priėmimas, dėmesio sutelkimas, reakcija ir t.t. Profesionalių atletų atveju kognityvinių įgūdžių lavinimas gali būti nemažiau svarbus nei motorinių ar kitų įgūdžių puoselėjimas. Efektyvesniam įgūdžių lavinimui gali padėti nuoseklios ir tikslingos kognityvinės veiklos treniruotės.

Iš Inno4Health projekto metu sukurtos sistemos eksperimentų metu surinktų duomenų buvo atlikta profesionalių atletų kognityvinės veiklos stebėsenos rezultatų klasterinė analizė, siejant skirtingų tipų kognityvinę veiklą su širdies darbu, pateiktos rekomendacijos automatizuotų mentalinių treniruočių metodikų sudarymui; įvertinta dirgiklių ir klaidų įtaka atletų širdies ritmui; įvertinta mentalinių treniruočių įtaka testų rezultatams.

Literatūra

- [1] Alsubaie, S. F., Alkathiry, A. A., Abdelbasset, W. K., & Nambi, G. 2020. The Physical Activity Type Most Related to Cognitive Function and Quality of Life. *BioMed Research International*.
- [2] García-González, L., Moreno, M. P., Moreno, A., Gil, A., & Del Villar, F. 2013. Effectiveness of a video-feedback and questioning programme to develop cognitive expertise in sport. *PLoS ONE*, 8(12), pp.1–12.
- [3] Forte, G., Favieri, F. & Casagrande M. 2019. Heart Rate Variability and Cognitive Function: A Systematic Review. *Sec. Autonomic Neuroscience.*, 13:710. ISSN 1662-453X.

Žmogaus judėjimo aktyvumo profilio nustatymas naudojant dėvimų įrenginių duomenis

Tauras Gaulia, Vytautas Janilionis

Kauno technologijos universitetas

Fizinio aktyvumo stoka yra reikšmingas daugelio lėtinių ligų išsivystymo veiksnys. Tinkami gyvenimo būdo įpročiai padeda išvengti arba kontroliuoti lėtines ligas. Dažnai žmogui siūloma didinti fizinį aktyvumą, rekomenduojami konkretūs fizinio aktyvumo planai, tačiau jų vykdymą ženkliai apsunkina didelis informacijos kiekis ir galimybės skirti resursus ilgalaikiai fizinio aktyvumo proceso kontrolei. Pranešime pristatomo darbo tikslas - sukurti matematinį modelį, kuris sudarytų žmogaus judėjimo aktyvumo individualų profilį pagal ilgalaikio stebėjimo duomenis gaunamus iš dėvimų įrenginių. Toks profilis yra ženkli pagalba tiek žmogui vykdančiam judėjimo aktyvumo planą, tiek gydytojui priimančiam sprendimus dėl gydymo eigos. Pranešime analizuojami ir pilotinių tyrimų rezultatai, kurie gauti panaudojus sukurtą modelį ir programines priemones realiems duomenims.

Literatūra

- [1] Marques, A., Santos, T., Martins, J., Matos, M. G. D., & Valeiro, M. G. 2018. The association between physical activity and chronic diseases in European adults. *European journal of sport science*, 18(1), 140-149.
- [2] Backes, A., Gupta, T., Schmitz, S., Fagherazzi, G., van Hees, V., & Malisoux, L. 2022. Advanced analytical methods to assess physical activity behavior using accelerometer time series: A scoping review. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*, 32(1), 18-44.
- [3] Li, Y., Shen, D., Nie, T., & Kou, Y. 2022. A new shape-based clustering algorithm for time series. *Information Sciences*, 609, 411-428.

Mašininio mokymosi metodų taikymo apžvalga naujagimių EEG signalų analizei

Asta Kybartaitė-Žilienė, Robertas Alzbutas

Kauno technologijos universitetas

Sparti informacinių technologijų plėtra per pastaruosius dvidešimt metų padėjo surinkti didelius duomenų kiekius sveikatos apsaugos ir priežiūros sistemoje. Gyvename laikotarpiu, kai terminas „e-sveikata“ vartojamas vos ne kasdien. Dirbtinis intelektas ir didieji duomenys buvo pritaikyti elektroninėje erdvėje, siekiant užtikrinti veiksmingą sveikatos priežiūros sistemos veiklą, t.y., dideliems sveikatos įrašams registruoti, medicininių vaizdų gavimui, kaupimui, perdavimui, sveikatos duomenų bazių kūrimui, siekiant gauti kuo greitesnę ir tikslesnę diagnozę, sumažinti klaidas dėl žmogaus nuovargio, optimizuoti medicininės išlaidas, pakeisti pasikartojančias ir daug darbo reikalaujančias užduotis, bei pan. Viena iš sudėtingiausių užduočių, susijusių su didžiais duomenimis yra jų valdymas.

Sveikatos priežiūros sistemoje yra įvairių metodų, leidžiančių neinvaziniu būdu stebėti, diagnozuoti visokius sutrikimus ar pažeidimus; vienas iš tokių – elektrofiziologinių signalų registravimas. Pagal literatūros apžvalgą, penki iš tūkstančio naujagimių gimsta su smegenų pažeidimais. Tai sudarytų 0,5 procento visų naujagimių. Lietuvoje 2001 metais gimė 23,3 tūkstančių naujagimių, o tai galimai yra apie 117 naujagimių su smegenų pažeidimais. Ankstyvas neinvazinis elektroencefalografijos (EEG) naujagimių būklės monitoringas leidžia patikimai įvertinti su neurologinio vystymosi rezultatais susijusią smegenų veiklą.

Šiame darbe buvo analizuojami atvirai prieinami naujagimių EEG duomenys [1]. Pirmiausiai buvo atliekamas išankstinis duomenų apdorojimas – siekiama pašalinti signalų „triukšmus“, po to buvo išskiriami aprašomosios statistikos požymiai ir pritaikomi mašininio mokymosi algoritmai, siekiant įvertinti, kaip tiksliai, pasitelkiant didžiuosius duomenis, galima automatiškai nuspėti smegenų pažeidimus, padėti diagnozuoti sutrikimus, ligas. Mašininio mokymosi priemonėmis gauti rezultatai buvo lyginami su gydytojų-ekspertų EEG signalų vertinimais. Apibendrinant, galima teigti, kad geriausias tikslumas (angl. accuracy) pasiektas su atraminių vektorių (SVM), neuroninių tinklų (NNS) ir atsitiktinių miškų (RF) klasifikatoriais. Dirbant su realiais elektrofiziologiniais signalais, tikslesniems rezultatams gauti reikalingas kokybiškas išankstinis signalų apdorojimas, efektyvus reikšmingų požymių išgavimas (atliekant kiekybinę signalų analizę) ir tinkamų mašininio mokymosi klasifikatorių parinkimas bei jų parametru suderinimas. Mašininio mokymosi algoritmu kūrimas ir taikymas gali padėti greitai, neinvaziškai ir kiekybiškai įvertinti smegenų sveikatos rodiklius, sutrikimų rizikas, pasirinkti gydymo strategijas, optimizuoti gydymo resursus.

Literatūra

- [1] J. M. O’Toole, S. R. Mathieson, F. Magarelli, W. P. Marnane, G. Lightbody, G. B. Boylan. 2022. Neonatal EEG Graded for Severity of Background Abnormalities. Zenodo, doi: 10.5281/zenodo.6587973.

Analysis of Serial Algorithms for Processing Large Scale Sparse Matrices

Vytautas Kleiza[†], Arnas Vyšniauskas[‡]

[†]Vytautas Magnus University

[‡]University College London

A serial algorithm for sparse to sparse matrix multiplication will be analysed. Its performance will be compared to industry standard packages' routines for general matrix to matrix multiplication. For the implementation of this algorithm, a data-structures for storing sparse matrices will be described as well as a testing environment for benchmarking multiplication algorithms. The final results yielded that the implementation of the serial algorithm for sparse matrices outperformed industry standard routine in a specific domain.

Simetrinio blokinių šifro taikymas blokų grandinės ir skaičiuoklės režimais ilgiems ir trumpiems pranešimams užšifruoti

Matas Levinskas, Aleksejus Michalkovič, Eligijus Sakalauskas, Lina Dindienė

Kauno technologijos universitetas

Šiame pranešime yra pristatomi simetrinio blokinių šifro, paremto matricinio laipsnio funkcija (MLF), taikymai dviem šifravimo režimams. Darbe naudojama funkcija buvo pirmą kartą paminėta 2007 metų straipsnyje [1]. Vėliau ši funkcija buvo pritaikyta kriptografijoje ir jos pagrindu buvo pasiūlyti keli kriptografiniai primityvai. 2020 metais pristatytas simetrinis blokinių šifras [2], kuris turi puikaus saugumo savybę, t.y. šifrograma statistiškai nepriklauso nuo pradinės tekstogramos. Šio blokinių šifro pagrindu pasiūlyti blokų grandinių ir skaičiuoklės šifravimo režimų realizacijos [3–5].

Mūsų pranešime yra nagrinėjami abiejų minėtų šifravimo režimų pritaikymai ilgiems ir trumpiems pranešimams užšifruoti. Ilgiems pranešimams simuliuoti mes naudojame laisvai prieinamus paveikslukus, kuriuos užšifruojame mūsų siūlomais algoritmais. Trumpiems pranešimams simuliuoti mes naudosisime sugeneruotą tekstą. Šifravimo kokybę mes vertiname ne tik vizualiai, bet ir remiantis tokiais statistikos metodais kaip histogramos ir neparimetrinės hipotezės.

Literatūra

- [1] Sakalauskas E, Luksys K (2007) Matrix power s-box construction. *Cryptography ePrint Archive*.
- [2] Sakalauskas E, Dindienė L, Kilčiauskas A, et al. (2020) Perfectly secure Shannon cipher construction based on the matrix power function. *Symmetry* 12: 860.
- [3] Dindienė L, Mihalkovich A, Luksys K, et al. (2022) Matrix Power Function Based Block Cipher Operating in CBC Mode. *Mathematics* 10: 2123.
- [4] Mihalkovich A, Levinskas M, Dindienė L, et al. (2022) CBC Mode of MPF Based Shannon Cipher Defined Over a Non-Commuting Platform Group. *Informatica* 833–856.
- [5] Mihalkovich A, Levinskas M, Sakalauskas E (2022) Counter Mode of the Shannon Block Cipher Based on MPF Defined over a Non-Commuting Group. *Mathematics* 10: 3363.

The Identification and Removal of Artefacts in Medical Images

Dovydas Lugas, Kristina Štutienė

Kaunas University of Technology

Artefacts in computed tomography images are a relatively common occurrence. These include beam hardening, motion, ring, noise, metallic and other types of artefacts [1]. Among these, some of the most common are metallic and metal-induced artefacts like beam hardening and Poisson noise. In this paper, several models for metal artefact reduction in computed tomography images are examined. Three models were tested: the artefact disentanglement network, the reused convolutional network, and a reused convolutional network enhanced with sinogram information.

A sinogram is a projection of an image into a two-dimensional space of lines parametrized by their distance from the origin t and the angle θ [2]. It is a representation of the X-ray intensities captured by a CT scanner. Each point in a sinogram corresponds to an intensity difference between the source of the X-rays and the detector. A relationship between the image and its sinogram is defined by the Radon transform:

$$Rf(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds,$$

where f in the medical imaging context is the attenuation coefficient, which represents the proportion of photons that a beam loses per millimetre of a material while travelling through it. To perform the inverse operation, we rely on the central slice theorem:

$$F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) = F(Rf)(S, \theta),$$

where F, F_2 refer to the one-dimensional and two-dimensional Fourier transforms respectively. Both forward and backward transformations are used in this paper to combine and integrate sinogram domain information with the corresponding image domain information. The study showed that the models performed similarly quantitatively, as indicated by comparable values in metrics such as peak signal-to-noise ratio and structural similarity index measure. However, in qualitative assessments, it was determined that the reused convolutional network yielded higher-quality images compared to the other models.

References

- [1] Boas, F. E., & Fleischmann, D. 2012. CT artefacts: Causes and reduction techniques. *Imaging in Medicine*, 4(2):229–240.
- [2] Beatty, J. A. The Radon transform and the mathematics of medical imaging. 2012.

Improving Understanding of CO₂ and Hydrogen Storage in Lithuanian Reservoir Rocks Using Machine Learning Algorithm and Digital Rock Volumes

Shruti Malik[†], Pijus Makauskas[†], Viltė Karaliute[†], Ravi Sharma[‡], Mayur Pal[†]

[†] Kaunas University of Technology

[‡] Indian Institute of Technology

The global increase in CO₂ emissions has become a major cause for concern as it contributes to climate change. This has led to growing emphasis on the capture, utilization, and storage of CO₂ (CCUS) in underground reservoirs. Also, increasing challenges related to energy security has led to rapid research in development of hydrogen as a fuel to replace fossil-based fuels in short to long term scenario in Baltics and Europe. The Baltic Sea region countries have shown an increased interest in CCUS and hydrogen research as well as implementation. In Lithuania, particularly, the research aimed at comprehending the long-term consequences of CO₂ geological storage is still in its early stages. On Hydrogen, Lithuania has established hydrogen platform and plans to develop hydrogen production and transport infrastructure with aim of reducing CO₂ foot print and transforming its industrial sector.

The combination of machine learning (ML) and digital rock physics can lead to significant advances in CCUS and hydrogen storage, allowing for a deeper understanding of pore-scale processes in subsurface reservoir rocks, which is crucial for evaluating the long-term impact of CO₂ retention and hydrogen storage on the integrity of lithological formations. ML algorithms are being used to analyze large data sets generated from various stages of CCUS and hydrogen storage, and extract image-based features to solve challenging problems in geoscience and related areas. Digital rock physics uses computer simulations to study the behavior of fluid flow and transport through porous media such as subsurface reservoirs. It allows for the prediction of the properties and behavior of rocks, such as porosity, permeability, and capillary pressure, which are critical to the success of CCUS and hydrogen storage. In this study, the focus is on improving our understanding of pore-scale processes in Lithuanian reservoirs, to assess the potential long-term impact of CO₂ and hydrogen storage. To achieve this aim, subsurface core samples from Syderiai and Vaskai reservoirs in Lithuania are taken, along with representative analog reservoir rock samples. These samples are scanned using MXCT scanning machine to obtain three dimensional digital volumes, and rock mineralogy data is also collected. Segmentation algorithms are then used to separate the pore space from the solid grains, allowing for the characterization of the pore space. K-means algorithm is used to determine rock properties, particularly porosity and permeability values are then extracted using lattice Boltzmann simulation on the digital rock volume. The results obtained using these methods are first benchmarked on analog core samples before extracting properties on reservoir rocks. The methodology described above can be used to optimize the performance of CCUS and hydrogen storage processes by enhancing our understanding of their storage and flow in subsurface reservoir rocks. By improving the accuracy of predictions and simulations, these technologies can aid in identifying suitable reservoirs for CO₂ and H₂ storage, ensuring the safe and efficient implementation of CCUS and hydrogen storage projects.

Informacijos slėpimas stochastinėse muaro gardelėse

Loreta Saunorienė, Minvydas Ragulskis

Kauno technologijos universitetas

Vizualinė kriptografija – tai informacijos slėpimo skaitmeniniuose vaizduose metodika [1]. Naudojant vizualinę kriptografiją, slaptas vaizdas yra išskaidomas į du ar daugiau skirtingų vaizdų taip, kad nei viename iš jų, atskirai paėmus, slaptos informacijos išvelgti neįmanoma. Nors tokiam užkodavimui yra reikalingi sudėtingi algoritmai, tačiau atkoduoti slaptą informaciją galima tiesiog plika akimi, prieš tai sudėjus visas vaizdo dalis vieną ant kitos.

Dinaminėje vizualinėje kriptografijoje slaptas vaizdas yra užkoduojamas jį įterpiant į muaro linijų gardelę taip, kad užkoduotame statiniame vaizde slaptos informacijos būtų neįmanoma įžiūrėti [2]. Įdomu tai, kad dinaminėje vizualinėje kriptografijoje slaptą informaciją atkoduoti irgi galima plika akimi, kaip ir klasikinėje vizualinėje kriptografijoje. Tam užkoduotą vaizdą reikia virpinti iš anksto numatytu dėsniu su iš anksto fiksuotais parametrais [2]. Atlikti tyrimai rodo, kad žmogaus akis pati savaime gali vidurkinti virpantį vaizdą ir matyti slaptą informaciją, jeigu minimalus virpesių dažnis siekia bent 25–28 Hz [3].

Deja, dinaminės vizualinės kriptografijos schemas, pagrįstos slaptos informacijos įterpimu į periodines muaro gardeles, kitaip nei klasikinės vizualinės kriptografijos schemas, nėra atsparios statistinės analizės algoritmams. Pagrindinis šio darbo tikslas yra pasiūlyti dinaminės vizualinės kriptografijos schemą, pagrįstą informacijos kodavimu neperiodinėse stochastinėse muaro gardelėse, taip padidinant užkoduojamos informacijos saugumą. Tačiau sugeneruoti du stochastinius vaizdus, kurie pusiausvyros būsenoje būtų labai panašūs, o, suvidurkinus laike, akivaizdžiai skirtingi, nėra paprasta. Šiam uždaviniui išspręsti yra konstruojamos specialios tikslo funkcijos; joms optimizuoti naudojami evoliuciniai optimizavimo algoritmai [4]. Informacijos slėpimo tokiose stochastinėse muaro gardelėse efektyvumą iliustruoja skaitiniai eksperimentai.

Literatūra

- [1] Naor, M. and Shamir, A. 1995. Visual cryptography. In: *Proceedings of the Advances in Cryptology (EUROCRYPT'94)*, Berlin/Heidelberg: Springer. pp. 1–12.
- [2] Ragulskis, M. and Aleksa, A. 2009. Image hiding based on time-averaging moiré. *Optics Communications*, 282:2752–2759.
- [3] Lu, G., Saunoriene, L., Gelžinis, A., Petrauskiene, V., and Ragulskis, M. 2018. Visual integration of vibrating images in time. *Optics Engineering*, 57:093107.
- [4] Saunoriene, L., Saunoris, M., and Ragulskis, M. 2023. Image hiding in stochastic geometric moiré gratings. *Mathematics*, 11:1763.

Susietų nulpotentinių matricių iteracinių schemų tinklas ir jo taikymas vaizdams slėpti⁶

Rasa Šmidaitė, Minvydas Ragulskis

Kauno technologijos universitetas

Susietų matricinių iteracinių schemų tinklas yra nagrinėjamas esant nulpotentinei pradinių sąlygų matriciai. Tinklo sudėtingumas apibrėžiamas didinant ne mazgų skaičių, bet keičiant paties mazgo struktūrą – skaliarinis kintamasis, aprašantis mazgo dinamiką, keičiamas n -tos eilės kvadratine matrica. Nulpotentinė pradinių sąlygų matrica lemia tai, jog tinkle stebimas divergavimo efektas, o matricos dimensija ir struktūra užtikrina $n - 1$ skirtingu greičiu diverguojančios papildomos komponentės egzistavimą. Šiomis savybėmis remiantis buvo pasiūlyta vaizdų kodavimo schema, leidžianti paslėpti $n - 1$ dvispalvių skirtingų slaptų vaizdų. Skaitiniai eksperimentai iliustruoja pasiūlytos metodikos veiksmingumą.

Literatūra

- [1] Navickas, Z., Smidaitė, R., Vainoras, A. and Ragulskis, M. 2011. The logistic map of matrices, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B* 16 (3): 927.
- [2] Navickas, Z., Ragulskis, M., Vainoras, A. and Smidaitė, R. 2012. The explosive divergence in iterative maps of matrices, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 17 (11): 4430–4438.
- [3] Lu, G., Smidaitė, R., Howard, D. and Ragulskis, M. 2019. An image hiding scheme in a 2-dimensional coupled map lattice of matrices, *Chaos, Solitons & Fractals* 124: 78–85.
- [4] Smidaitė, R., Navickas, Z. and Ragulskis, M. 2021. Clocking divergence of iterative maps of matrices, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 95.

⁶Mokslinis tyrimas finansuojamas Europos socialinio fondo lėšomis pagal priemonę Nr. 09.3.3-LMT-K-712 „Mokslininkų, kitų tyrėjų, studentų mokslinės kompetencijos ugdymas per praktinę mokslinę veiklą“. Projekto numeris 09.3.3-LMT-K-712-23-0235.

Trupmeninio logistinio žemėlapio laikino stabilizavimo schema, pagrįsta trumpais valdymo impulsais

Ernestas Uzdila, Minvydas Ragulskis

Kauno technologijos universitetas

Nagrinėjamas trupmeninis logistinis žemėlapis, aprašantis netiesinę diskretinę sistemą su atminties horizontu, siekančiu pradinę sąlygą. Gerai žinoma, kad tokiose sistemose galima laikinai stabilizuoti nestabilias orbitas [1]. Šiame darbe pristatoma nestabilių orbitų laikino stabilizavimo schema, kurios pagalba trupmeninį logistinį žemėlapij galima išlaikyti nestabilios orbitos aplinkoje kiek norima ilgai.

Literatūra

- [1] Petkeviciute-Gerlach, D., Timofejeva, I., Ragulskis, M, 2020. Clocking convergence of the fractional difference logistic map. *Nonlinear Dynamics*. 100:3925–3935. DOI: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-020-05703-6>

Kaip nepermokėti investuojant?

Konstantinas Vaškevičius

SEB Life and Pension Baltic SE

Teoriškai, investavimas yra tiesiog sudėtinių palūkanų praktinė išraiška. Praktiškai, net ir dažnas konsultantas nesugeba kokybiškai palyginti dviejų investavimo įrankių (ar pasiūlymų iš skirtingų tiekėjų), mat netinkamai parinktos pradinės sąlygos gali lemti visiškai neteisingą rezultatą. Kviečiu susipažinti su investiciniuose produktuose dažniausiai taikomais mokesčiais ir jų įtaka galutiniam rezultatui.

Šildymo sistemų optimizavimas pastatuose siekiant mažinti išlaidas ir CO₂ emisijų kiekį

Otilija Vonžudaitė^{†,‡}, Linas Martišauskas^{†,‡}, Sigita Urbonienė[†], Rolandas Urbonas[‡],
Rimantas Bakas[‡]

[†] Vytauto Didžiojo universitetas

[‡] Lietuvos energetikos institutas

Centralizuotas šilumos tiekimas (CŠT) yra viena svarbiausių ateities išmaniųjų energetikos sistemų dalių ir laikoma viena pagrindinių priemonių siekiant energijos vartojimo efektyvumo didinimo tikslų. CŠT reikšmė Europoje ženkliai auga – Europos Sąjunga (ES) centralizuotą šildymą mato kaip vieną iš perspektyviausių būdų įgyvendinant pagrindinį „Europos žaliojo kurso“ komunikato tikslą – pasiekti, kad iki 2050 m. Europa taptų pirmuoju neutralaus poveikio klimatui žemynu. Norint įgyvendinti klimato tikslus ir ilgalaikę ES strategiją, itin svarbu mažinti šildymo sistemų priklausomumą nuo iškastinio kuro, naudoti atsinaujinančius energijos išteklius ir energiją tiekti efektyviau. Viena iš svarbiausių technologijų alternatyvoms CŠT sistemoms yra šilumos siurbLIAI, kurie yra esminis sprendimas didinant energijos vartojimo efektyvumą ir mažinant šildymo sistemų priklausomumą nuo iškastinio kuro. Buvo sudarytas daugiatis netiesinio optimizavimo uždavinio matematinis modelis, aprašantis šilumos siurblių sistemų parinkimą įvairių tipų pastatams, atsižvelgiant į techninius, ekonominius, aplinkosauginius ir socialinius veiksnius, kad bendros išlaidos ir CO₂ emisijos pasirinkto periodo metu būtų mažiausi. Skaičiavimai buvo atliekami įvairių tipų renovuotiems ir nerenovuotiems pastatams: daugiabučiams, mokykloms, vaikų darželiams, prekybos centrui. Analizės periodas apėmė 10-ties metų laikotarpį. Į optimizavimo uždavinį buvo įtraukti skirtingų modelių oras-vanduo, geoterminiai ir hibridiniai šilumos siurbLIAI bei pagalbiniai elektriniai šildytuvai. Išsprendus uždavinį, gauti optimalūs šilumos siurblių ir elektrinių šildytuvų kiekiai bei parinktų technologijų kiekvieno mėnesio darbo režimai viso analizuojamo periodo metu. Visais analizuojamais atvejais optimali šildymo sistema turėtų būti sudaryta iš oras-vanduo tipo šilumos siurblių ir elektrinių šildytuvų. Mokykloms ir prekybos centrui papildomai parenkami ir hibridiniai šilumos siurbLIAI. Todėl tikslas, kad šildymo sistema būtų neutrali CO₂ emisijų atžvilgiu, buvo pasiektas aštuoniems iš vienuolikos analizuojamų pastatų. Atlikus rezultatų ekonominę analizę, buvo nustatyta, kad ekonomiškai naudingiausios investicijos yra į renovuotam penkiaaukščiui ir nerenovuotam devynaukščiui parinktas optimalias šildymo sistemas, kurioms gauta mažiausia vidutinė kaina už šiluminę energiją, trumpiausi atsipirkimo laikotarpiai ir geresni investicijų grąžos rodikliai.

Trijų pirminių RSA kriptografinio protokolo ataka, paremta kubinėmis lygtimis

Jokūbas Žitkevičius, Aleksejus Michalkovič

Kauno technologijos universitetas

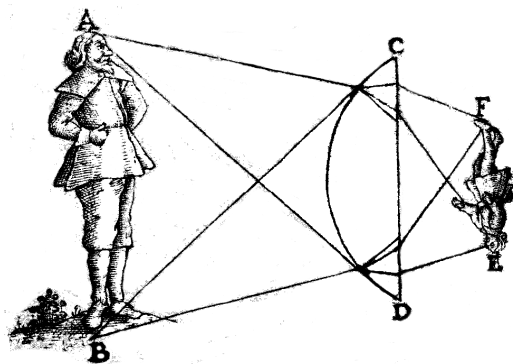
Klasikinio Rivest-Shamir-Adleman (RSA) kriptografinio protokolo saugumo parametras yra sudėtinis skaičius $n = pq$, čia p ir q yra du skirtingi pirminiai skaičiai [1]. Šio protokolo saugumas yra paremtas sveikojo skaičiaus skaidymo daugikliais uždaviniu [2], kadangi pikta-valius, kuris žino pirminių skaičių p ir q gali klastoti el. parašus arba perskaityti pranešimus, užšifruotus RSA algoritmo pagalba. 2015 metų straipsnyje [3] buvo pasiūlyta ataka, paremta Goldbacho hipoteze bei kvadratinėmis lygtimis. Straipsnio autoriai parodė, kad remiantis Goldbacho hipoteze ir Vįjeto teorema galima nustatyti slaptuosius pirminius skaičius p ir q , jeigu skaičius n yra pakankamai mažas.

Šiame pranešime yra nagrinėjama RSA protokolo modifikacija, kai $n = pqr$, čia p , q ir r yra trys skirtingi pirminiai skaičiai [4]. Šiuo atveju aukščiau minėta ataka nėra veiksminga, nes jos pagalba negalima rasti visų trijų pirminių skaičių. Todėl mes pasiūlytą 2015 metais idėją apibendrinome šiai RSA protokolo modifikacijai. Kadangi turime tris pirminius skaičius, tai pritaikėme kubinėms lygtims spręsti skirtą Vįjeto teoremos pavidalą. Pranešime pristatomi mūsų nagrinėjamos atakos taikymų pavyzdžiai bei iššūkiai, su kuriais susiduriama, kai skaičius n yra pakankamai didelis.

Literatūra

- [1] Rivest RL, Shamir A, Adleman L (1978) A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Commun. ACM* 21: 120–126.
- [2] Boneh D (1999) Twenty Years of Attacks on the RSA Cryptosystem. 46.
- [3] Liu C, Chang C-C, Wu Z-P, et al. (2015) A study of relationship between RSA public key cryptosystem and Goldbach's conjecture properties. *International Journal of Network Security* 17: 445–453.
- [4] Hinek MJ (2008) On the security of multi-prime RSA. *Journal of Mathematical Cryptology* 2: 117–147.

Statistika ir jos taikymai



The estimation of TRADITIONAL Phillips Curve

Algirdas Bartkus

Vilnius University

We present microeconomic foundations for original Phillips curve formulation and an empirical investigation, where the structure of the theoretical model serves as a template for the creation of the empirical model.

For a couple of decades the majority of empirical Phillips curve type assessments are performed using the New Keynesian Phillips curve with Calvo pricing as a benchmark for this type of relationship. New Keynesian model has solid microeconomic foundations and has proved itself very well in the analysis of price stickiness, nevertheless, it is not without limitations. The main insufficiency of New Keynesian model is that it has no direct links to the conditions and the changes that occur in the labour market. We aim to fill this gap and presents alternative microeconomic foundations for Phillips curve, that lead to the model with direct links to the labour market. Although the empirical analysis is based on Lithuanian data, it is not country specific.

Change-segment detection in functional sample via projections to Wiener process⁷

Karolis Bartkus, Alfredas Račkauskas

Vilnius University

We introduce a functional change segment test based on projections to the Wiener process trajectories. The test statistic is defined as

$$T_{n,L} := \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \max_{0 \leq k < m \leq n} \frac{1}{\rho_n(m-k)} \sum_{i \in I(k,m)} \sum_{j \in I_n \setminus I(k,m)} h_W(\langle X_i, W_l \rangle, \langle X_j, W_l \rangle),$$

here L - number of Wiener process trajectories, ρ_n - balancing factor for long and short segment intervals, $h_W(x, y) = \mathbb{1}_{x < y} - \mathbb{1}_{y > x}$ - Wilcoxon kernel, $X_1(t), \dots, X_n(t)$ - functional sample, W_1, \dots, W_L - Wiener trajectories. We analyze limit distributions under H_0 and H_A , power tests, and potential applications.

References

- [1] Danielius, Tadas; Račkauskas, Alfredas. (2022). Multiple Change-Point Detection in a Functional Sample via the G -Sum Process. *Mathematics*. 10. 2294. 10.3390/math10132294.
- [2] Račkauskas, Alfredas; Wendler, Martin. (2020). Convergence of U-processes in Hölder spaces with application to robust detection of a changed segment. *Statistical Papers*. 61. 10.1007/s00362-020-01161-9.

⁷Doktorantūros studijos

Apie prasiskiedimo efekto modeliavimą grupiniame testavime

Mantas Bilaišis, Viktor Skorniakov

Vilniaus universitetas

Grupinis arba kaupinių testavimas – tai testavimo metodas, kurį taikant pavienių objektų mėginių testavimas keičiamas mėginių grupių testavimu tokiu būdu siekiant sutaupyti testavimui reikalingų lėšų. Metodas žinomas ir taikomas nuo II-jo pasaulinio karo (žr. [1]), tačiau ypatingą reikšmę įgavo COVID-19 pandemijos metu. Testuojant grupėmis reikia atsižvelgti į prasiskiedimo efektą, kurio esmė ta, kad atliekant testą jungtiniam mėginiui, sukomponuotam iš kelių individualių, testo charakteristikos – jautrumas ir specifiškumas – gali reikšmingai pasikeisti. Pranešimo metu apžvelgsime literatūroje pasiūlytus prasiskiedimo efekto modelius ir iliustruosime jų taikymą realiems empiriniams duomenims.

Literatūra

- [1] Dorfman, R. 1943. The Detection of Defective Members of Large Populations. *The Annals of Mathematical Statistics*, 14:436-440.

Savonoriškosios imties panaudojimas populiacijos parametrams vertinti

Ieva Burakauskaitė, Andrius Čiginas

Valstybės duomenų agentūra
Vilniaus universitetas

Siekiamo rasti būdą efektyviai integruoti savonorišką (netikimybinę) imtį vertinant populiacijos proporcijas 2021 metų gyventojų tautybės, gimtosios kalbos ir išpažįstamo tikėjimo statistiniame tyrime. Dėl savonoriško dalyvavimo apklausoje atsirandantį parametru vertinimo poslinkį koreguojame vertindami netikimybinės imties respondentų polinkius (tikimybes) dalyvauti apklausoje. Šių tikimybių įvertinius sudarome naudodami parametrinį logistinę regresijos modelį. Modeliavimą atliekame dviem būdais: esant prielaidai, kad polinkiai dalyvauti apklausoje nepriklauso nuo tyrimo kintamojo ir kad nuo jo priklauso. Abiem atvejais polinkiai įvertinami naudojant didžiausiojo tikėtimumo metodą. Sudarytus įvertinius palyginame atlikdami imitacinį tyrimo modeliavimą.

fANOVA Application for Comparison of Companies by the CEO Turnover Rates

Urtė Deinoravičiūtė, Anna Yasyreva

Vilnius University

The aim of this study was to analyze the data collected from the Nasdaq Baltic listed companies' financial statements to estimate if CEO changes have a significant influence on financial performance: profitability, indebtedness and stock price. Previous research on this topic found significant effects of CEO change on the profitability ratios and some authors proposed positive effects [1], [2] but others found a negative relationship [3], [4]. As for the optimal tenure for a CEO, it was usually estimated at the period between 10 and 15 years [5]. The methods we used to analyze this data include functional data analysis, namely fANOVA and fMANOVA. Data was collected for 34 companies for a period from 2006 to 2021 (from 2008 to 2022 for stock prices) and financial ratios were computed: ROE (return on equity), ROA (return on assets), EBITDA margin, debt to equity ratio and current ratio. The data was converted to its functional form using either b-spline or Fourier basis for different measures. Also, the companies were divided into three groups: those that had no CEO changes over the period; those that had 1 or 2 and those that had 3 or more. Pointwise ANOVA indicated certain periods where the 3rd group was significantly different from the first two in terms of EBITDA margin. Potential reasons for the differences and the findings of fANOVA and fMANOVA are discussed in the paper.

References

- [1] Xu, H. 2015. Effects of CEO Turnover on Firm Performance. *Master's thesis, University of Amsterdam*. <https://scripties.uba.uva.nl/document/635355>
- [2] Gao, H., Harford, J. and Li, K. 2017. CEO Turnover–Performance Sensitivity in Private Firms. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 52(2):583–611.
- [3] Gonzalez, M., Garcia, R. and Ortega, C. 2007. The Impact of CEO and Director Turnover on Financial Performance in Venezuela. *Latin American Business Review* 7:1–18.
- [4] Doğan, M. et al. 2016. Determining Factors on CEO Turnover and Its Impact on Financial Performance in Turkey. *Business and Economics Research Journal* 7(2):15–27.
- [5] Cutter, C. 2020. New Thinking Emerges on Optimal Tenure for a CEO. *The Wall Street Journal*. <https://www.wsj.com/articles/new-thinking-emerges-on-optimal-tenure-for-a-ceo-11580725800>

Genų mutacijų įtakos širdies ligoms analizė

Gabrielė Jenciūtė[†], Gabrielė Kasputytė[†], Karolina Mėlinytė-Ankudavičė[‡], Marius Šukys[‡], Ričardas Krikštolaitis[†], Eglė Ereminienė[‡], Renaldas Jurkevičius[‡], Tomas Krilavičius[†]

[†] Vytauto Didžiojo universitetas

[‡] Lietuvos sveikatos mokslų universitetas

Genetiniai veiksniai turi įtakos žmogaus ligų pasireiškimui. 20-30 procentų dilatacinės kardiomiopatijos atvejų gali nulėmti vieno geno viena mutacija. Manoma, jog likusiems atvejams, sukelti ligą neužtenka vienos mutacijos: įvairūs genetinių variantų deriniai, kartu su ekspozomu, gali lemti ligos pasireiškimą. Atliekant genetinius tyrimus, galima nustatyti nemažą dalį genetinės variacijos tarp pacientų. Šiame tyrime remiantis surinktais 95 širdies ligų pacientų genetiniais ir klinikiniais duomenimis, buvo tiriama genų ir jų mutacijų egzistavimo priklausomybė nuo echokardiografinių parametrų ir klinikinių duomenų. Analizės metu sudaryti logistinės regresijos modeliai. Pastebėta, jog klinikiniai parametrai ne vienodai lemia skirtingų genų mutacijų egzistavimą.

Kai kurių dažniausių metakalbinių komentarų statistinė analizė

Karolina Kanišauskienė

Vilniaus universitetas

Metakalbinis komentaras (arba metakomentaras) – tai kalbos arba teksto kalbinės raiškos aptarimas: vertinimas, vartojimo motyvavimas ir kt., t.y. kalbėtojas gali vertinti, pvz., žodį, jo tinkamumą šnekoje, motyvuoti savo pasirinkimą, pabrėžti raiškos paiešką ir t.t.

Duomenys analizei išrinkti iš „Dabartinės lietuvių kalbos teksto“ (<https://sitti.vdu.lt/istekliai/>). Nagrinėjama dalis dažnesnių komunikacines kalbos ypatybes įvardijančių metakomentarų, pvz., tiesą sakant, tiesą pasakius, trumpai tariant, tiksliau sakant, tiksliau pasakius ir t.t., aptinkamų tekстыne registruotuose keturių tipų tekstuose: grožinėje, negrožinėje, administracinėje literatūrose ir publicistikoje.

Tyrimo tikslas – matematinės statistikos metodais nustatyti metakomentarų vartojimo dėsningumus skirtingų tipų tekstuose.

Anksčiau atliktuose autorės tyrimuose nustatyta, kad ne visose teksto srityse metakomentarų vartojimas yra vienodas, jų dažnumą ir pasiskirstymą lemia tekstų tipas bei patys metakomentarai.

Literatūra

- [1] Piaseckienė, K. ir Radavičius, M. 2011. Lietuvių kalbos vaizdingumo raiškos priemonių analizė. *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai* 52: 220–224.
- [2] Župerka, K. 1995. *Kalbos priemonių konkurencija kaip lietuvių kalbos stilistikos objektas*. Šiauliai.

Homogeniškumo kriterijų cenzūruotoms imtims, esant išgyvenimo funkcijų susikirtimui, lyginamoji analizė

Gintarė Klimantavičiūtė, Rūta Levulienė

Vilniaus universitetas

Išgyvenamumo analizė yra statistinis metodas, naudojamas analizuoti duomenis, kuriuose nagrinėjamas laikas iki tam tikro įvykio. Šiame darbe atliktas galios tyrimas naudojant modeliavimą ir siekiant palyginti homogeniškumo kriterijus, skirtus cenzūruotoms imtims, kai galimas išgyvenimo funkcijų susikirtimas. Nagrinėti šie kriterijai: logranginis ([2]), dviejų etapų procedūra (TSPV), pasiūlyta Qiu ir Sheng (žr. [3]), modifikuotasis logranginis (MLR) ir modifikuotasis informantinis kriterijus (MS), pasiūlyti Bagdonavičiaus ir kt. ([1]). Modeliavimas buvo atliktas imant įvairius imties dydžius ir skirtingas pasiskirstymo funkcijas, apimančias įvairius scenarijus, kai išgyvenimo funkcijos nesikerta, kertasi laiko intervalo pradžioje, viduryje ir pabaigoje. Kad iširti, esant kokiam imties dydžiui, šie kriterijai gali būti patikimai taikomi buvo atliktas reikšmingumo lygmens vertinimas. Analizės rezultatai parodo, kad kriterijų galia priklausė nuo konkrečių sumodeliuotų duomenų savybių, tačiau gauta, kad MLR ir TSPV kriterijai veikė geriausiai esant įvairiems scenarijams. Rezultatai suteikia tyrėjams rekomendacijas, kurį statistinį metodą naudoti norint palyginti išgyvenamumo kreives esant cenzūruotoms imtims. Taip pat buvo atlikta realių duomenų analizė, iliustruojanti kriterijų taikymą.

Literatūra

- [1] Bagdonavičius, V. B., Levulienė, R. J., Nikulin, M. S., Zdorova-Cheminade, O. *Tests for Equality of Survival Distributions Against Non-Location Alternatives. Lifetime Data Analysis vol. 10, 2004, p. 445–46.*
- [2] Mantel, N. *Ranking Procedures for Arbitrarily Restricted Observation. Biometrics, vol. 23, no. 1, Mar. 1967, p. 65-78.*
- [3] Peihua, Q., Sheng, J. *A Two-Stage Procedure for Comparing Hazard Rate Functions. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), vol. 70, no. 1, Nov. 2007, pp. 191-208*

Vidutinio darbo užmokesčio vertinimas mažose populiacijos srityse

Enrika Komarovaitė

Valstybės duomenų agentūra
Vilniaus universitetas

Darbo užmokesčio struktūros statistiniame tyrime vidutinis mėnesinis bruto darbo užmokestis yra vertinamas visai šalies įmonėse dirbančiųjų populiacijai ir įvairiose jos srityse, kaip kad profesijų grupės. Tyrimo imtis yra sudaroma taip, kad visose suplanuotose vertinimo srityse būtų įmanoma pasiekti pakankamą vertinimo tikslumą. Šiais laikais statistinės informacijos vartotojai pageidauja rodiklių (parametrų) įverčių dar mažesnėse negu numatytos populiacijos srityse. Tuomet sričių imties dydžiai gali būti nepakankami taikant standartinis vertinimo metodus. Todėl nagrinėjame vertinimo mažose populiacijos srityse įvertinius, kurie remiasi srities lygmens modeliais, naudojančiais vidutinį darbo užmokestį, gautą iš administracinių duomenų. Atliktas tyrimas parodo, kad galima tikėtis pakankamai tikslų įverčių ir gana mažose populiacijos srityse.

Suderinamumo kriterijai perteklinių nulių regresijos modeliams

Rūta Levulienė, Vilijandas Bagdonavičius

Vilniaus universitetas

Modelio tinkamumo nustatymas yra svarbi analizės dalis. Sudėtingesnių regresijos modelių atveju pasigendama formalių testų, skirtų patikrinti regresijos modelio tinkamumą.

Buvo sukonstruotas modifikuotasis chi kvadrato kriterijus perteklinių nulių regresijos modeliams. Ištirta kriterijaus galia įvairių skirstinių ir alternatyvų atveju. Kriterijaus taikymas iliustruotas su realiais duomenimis.

Lietuvos tarpukario regionų ekonominių skirtumų statistinis įvertinimas ⁸

Jurgita Markevičiūtė, Zenonas Norkus

Vilniaus universitetas

Didėjant neapibrėžtumui, susijusiam su įvairiomis pasaulinėmis krizėmis, praeities krizių analizė pasitelkiant socialinius ir ekonominius duomenis tapo ypač aktuali. Tačiau Lietuvoje trūksta duomenimis pagrįstos informacijos apie visuomenės ir ekonomikos raidą per pastaruosius 100 metų. Duomenys yra fragmentiški ir dažnai nepalyginami. Mūsų atliekamas tyrimas leidžia geriau suprasti ekonominius procesus tarpukario Lietuvoje ir jos regionuose bei palyginti šiuos procesus ilgalaikėje perspektyvoje. Lietuvos atvejo analizė sudėtingėja dėl to, kad tarpukario laikotarpiu vyko tik vienas surašymas 1923 metais Didžiojoje Lietuvoje ir 1925 metais Klaipėdos krašte. Taip pat, valstybės sienų skirtumai tarpukariu ir moderniu laikotarpiu apsunkina regioninių skirtumų palyginimą ilgalaikėje perspektyvoje.

⁸The authors acknowledge financial support from the Baltic Research Programme project “Quantitative Data About Societal and Economic Transformations in the Regions of the Three Baltic States During the Last Hundred Years for the Analysis of Historical Transformations and the Overcoming of Future Challenges” (BALTIC100), project No. EEA-RESEARCH-174, under the EEA Grant of Iceland, Liechtenstein and Norway Contract No. EEZ/BPP/VIAA/2021/3.

Tikimybinių ir netikimybinių imčių integravimas vertinant proporciją

Vilma Nekrašaitė-Liegė^{†,‡}, Andrius Čiginas^{†,§}, Danutė Krapavickaitė[#]

[†] Valstybės duomenų agentūra

[‡] Vilniaus Gedimino technikos universitetas

[§] Vilniaus universitetas

[#] Lietuvos statistikų sąjunga

Tikimybinių ir netikimybinių imčių integravimas – viena iš pagrindinių temų imčių metoduose pastaruosius keletą metų. Literatūroje nagrinėjamos kelios skirtingos situacijos:

- (a) Tyrimo kintamasis yra stebimas tik netikimybinėje imtyje, bei nėra galimybės šių imčių apjungti elemento lygyje, t.y. imtyse naudojami skirtingi identifikatoriai (Chen ir kt., 2020).
- (b) Tyrimo kintamasis yra stebimas tik netikimybinėje imtyje, tačiau imtis galima apjungti elemento lygyje (Kim ir Haziza, 2014, taip pat Kim ir Wang, 2018).
- (c) Tyrimo kintamasis yra stebimas abejuose imtyse ir jas galima apjungti elemento lygyje (Tam ir Kim, 2018).

Šiame tyrime nagrinėjama (c) situacija, tyrimo parametru pasirinkta proporcija. Empiriškai palyginti skirtingi įvertiniai: įvertinys, kai naudojamas aposteriorinis sluoksniavimas, sudėtinis įvertinys, modelių pagrįstas įvertinys.

Taip pat buvo vertinama įvertinio dispersija. Pastarosios įvertinys sukonstruotas taip, kad būtų atsižvelgta ne tik į tikimybinės imties plano atsitiktinumą, bet ir netikimybinės imties atsitiktinumą. Pastarosios įtaka dispersijai vertinama atsižvelgiant į polinkio atsakyti tikimybės skirtinį.

Literatūra

- [1] Chen, Y., Li, P. and Wu, C. 2020. Doubly robust inference with non-probability survey samples. *Journal of the American Statistical Association* 115:532 2011-2021, DOI: 10.1080/01621459.2019.1677241.
- [2] Kim, J. K. and Haziza, D. 2014. Doubly robust inference with missing data in survey sampling. *Stat. Sin.* 24, pp. 375-394.
- [3] Kim, J. K. and Wang, Z. 2019. Sampling Techniques for Big Data Analysis. *International Statistical Review* 87.
- [4] Tam, S.-M. and Kim J.-K. 2018. Big data, selection bias and ethics – an official statistician’s perspective. *Statistical Journal of the IAOS* 34, pp. 577–588.

Edukometrija: nauja tarpdisciplininė mokslinių tyrimų kryptis

Alfredas Račkauskas

Vilniaus universitetas

Sujungus statistikos ir ugdymo mokslų žinias bei mąstymo būdus, atsirado nauja disciplina, vadinama „edukometrija“. Ji apima kai kuriuos psichometrijos, sociometrijos ir ekonometrijos įrankius bei siekia sukurti naujus testus, kriterijus ir standartus, reikalingus sudėtingam ugdymo procesui analizuoti. Edukometrijos taikymas apima įvairių priemonių, skirtų mokymo, mokymosi ir testavimo efektyvumui įvertinti, paruošimą. Remdamiesi [1], [2], Edukometriją pristatysime kaip besivystančią tarpdisciplininę kryptį, aptarsime jai priskiriamus uždavinius bei diskutuosime apie jos taikymų perspektyvas.

Literatūra

- [1] Thomaz Edson Veloso da Silva and João César Moura Mota. 2020. Educometrics: Principles, Issues and Possible Applications, preprint.
- [2] Taweep Sirirassamee, 2013. Concept of Educometrics. Academic Journal Bangkokthonburi university, Vol.2 No.1, p. 1-13.

Automatinio klasifikavimo uždavinys: atskirti klasę "nežinau"

Marijus Radavičius, Pranas Vaitkus

Vilniaus universitetas

Idėja, kad priimant sprendimus neapibrėžtumo sąlygomis tam tikrais atvejais racionalu galutinį sprendimą atidėti, gana sena. Dar 1943 m. buvo pasiūlytas nuoseklusis hipotezių tikrinimo metodas, kuris davė pradžią nuosekliajai analizei su taikymais kokybės kontrolėje [3], medicinoje, ekonomikoje, finansuose (žr., pvz., [5] ir ten cituojamą literatūrą). Vėliau [2] ši idėja, pavadinta *atsisakymo galimybe* (*rejection option*), buvo panaudota ir klasifikavimo bei atpažinimo uždaviniuose.

Automatinio mokymosi kontekste šios idėjos panaudojimas nėra toks betarpiškas ir natūralus kaip klasikinėje statistikoje, nes netelpa į standartinę *prognozuotojo ar klasifikatoriaus kovravimo* paradigmą [1]. Kaip galima iš duomenų išmokti tai, ko juose nėra? Siūlomi įvairūs šios problemos sprendimai, kitaip tariant *mokymosi su atsisakymu* (*learning with rejection*) metodai, faktiškai remiasi antrosios pakopos duomenimis, gautais pradinį duomenų rinkinį papildžius pasirinkto ir jau apmokyto klasifikatoriaus taikymo rezultatų duomenimis (žr., pvz., [4]).

Pranešime pristatomi keli *mokymosi su atsisakymu* metodai ir aptariamos jų savybės.

Literatūra

- [1] Barandas, M.; Folgado, D.; Santos, R.; Simão, R.; Gamboa, H. 2022. Uncertainty-Based Rejection in Machine Learning: Implications for Model Development and Interpretability. *Electronics* 11:303–408.
- [2] Chow, C.K. 1970. On Optimum Recognition Error and Reject Tradeoff. *IEEE Transactions on Information Theory* 16(1):41–46.
- [3] Kruopis, J.; Vaišvila, A.; Kalnius, R. 2005. *Mechatronikos gaminių kokybė. Atrankinė kontrolė*. Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla.
- [4] Motlagh, N. K.; Davis, J.; Anderson, T.; Gwinnup, J. 2023. Learning When to Say "I Don't Know". *arXiv:2209.04944v2 [cs.CV] 15 Feb 2023*.
- [5] Tze, L. L. 2001. Sequential analysis: some classical problems and new challenges. *Statistica Sinica* 11:303–408.

Statistinių kokybės kontrolės metodų taikymas eismo vertinimui sankryžose

Rūta Simanavičienė, Paulina Černyškovaitė

VILNIUS TECH

Didmiesčių sankryžose įrengtų eismo jutiklių duomenys dažniausiai naudojami eismo srautų statistikos rinkimui, bei eismo srautų analizei. Vilniaus miesto sankryžose įrengti eismo jutikliai matuoja šiuos rodiklius: eismo intensyvumą, jutiklio užimtumą, bei transporto priemonių vidutinį greitį. Minėtų rodiklių pagalba galima vertinti motorinio transporto eismo kokybės lygį sankryžoje, dėl to šiame tyrime minėti rodikliai yra apibrėžiami, kaip statistiniai procesai. Šiuo tyrimu norima parodyti, jog eismo jutiklių duomenų analizė gali pasitarnauti eismo valdymo sprendimų priėmimui. Tyrimo tikslas atlikti eismo kokybės sankryžoje vertinimą prieš sankryžos rekonstrukciją ir po jos piko metu taikant statistinės kokybės kontrolės metodus. Statistinės kokybės kontrolės analizė parodė, jog nagrinėjant realius eismo jutiklių duomenis svarbus dėmesys turi būti skiriamas imčių sudarymui, nes eismo intensyvumas darbo dienomis ir šventinėmis dienomis skiriasi, o tai įtakoja statistinės kokybės kontrolės metodo pasirinkimą. Atliktas tyrimas parodė, jog eismo kokybė minėtoje sankryžoje prieš rekonstrukciją ir po jos skiriasi, kas leidžia įvertinti sankryžos rekonstrukcijos naudą.

Literatūra

- [1] Baradaran, V., and Dashtbani, H. 2014. A decision support system for monitoring traffic by statistical control charts. *Management Science Letters* 4(8):1661–1670.
- [2] Chatterjee, I., Liao, C. F., and Davis, G. A. 2017. A statistical process control approach using cumulative sum control chart analysis for traffic data quality verification and sensor calibration for weigh-in-motion systems. *Journal of Intelligent Transportation Systems* 21(2):111–122.
- [3] Hamasha, M. M., Ali, H., and Ahmed, A. 2022. Ultra-fine transformation of data for normality. *Heliyon* 8(5): e09370.
- [4] Montgomery, D. C. 2009. *Introduction to Statistical Quality Control*, USA: JohnWiley & Sons.

Administracinių duomenų šaltinių naudojimas mėnesiniame pramonės įmonių veiklos statistiniame tyrime

Aušra Skorniakova

Valstybės duomenų agentūra

Pramonės įmonių veiklos statistinis tyrimas atliekamas nuo 1998 m. Tiriamasis laikotarpis – mėnuo. Tyrimas atliekamas taikant imčių metodus. Imties planas yra paprastoji atsitiktinė sluoksniinė imtis. Kadangi turima Statistinio ūkio subjektų registro informacija apie įmonių ankstesnių laikotarpių metines pajamas, įmonių mėnesinių pardavimo pajamų ir pajamų iš pramoninės veiklos sumoms kiekvienoje ekonominėje veikloje ar ekonominių veiklų grupėje vertinti taikomas santykinis įvertinys. Buvo išanalizuotos galimybės kaip papildomą informaciją įverčiams skaičiuoti naudoti įmonių Pridėtinės vertės mokesčio (PVM) deklaracijų duomenis. Nustatyta, kad mėnesinių apyvartos duomenų iš PVM deklaracijų naudojimas vietoj įmonių ankstesnių laikotarpių metinių pajamų šiek tiek pagerina įverčių tikslumą šalies lygmeniu bei daugumoje ekonominių veiklų (kai kuriose – ženkliai). Šiuo metu tęsiama alternatyvių įverčių analizė.

Pacientų, hospitalizuotų dėl COVID-19 ligos, mirties ligoninėje tikimybės vertinimas taikant statistinius ir mašininio mokymosi metodus⁹

Viktor Skorniakov[‡], Valentinas Lycholip^{†,‡}, Roma Puronaitė^{†,‡}, Greta Burneikaitė^{†,‡},
Augustina Jankauskienė^{†,‡}, Edita Kazėnaitė^{†,‡}, Gabrielė Tarutytė^{†,‡}, Justas Trinkūnas^{†,‡}

[†] Vilniaus universiteto ligoninė Santaros klinikos

[‡] Vilniaus universitetas

[#] Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Koronaviruso SARS-CoV-2 sukelta liga COVID-19 paveikė daugumą pasaulio šalių. Pandemijos metu ypač padidėjo apkrova sveikatos priežiūros sistemoms. Siekiant suvaldyti didelius besikreipiančių į ligoninių priėmimus ir hospitalizuojamų pacientų srautus, buvo ieškoma priemonių kuo tiksliau įvertinti pacientų būklę. Tam pasitelkiamos įvairios klinikinio vertinimo skalės, tokios kaip NEWS [1], COVID-GRAM [2], laboratorinių tyrimų indeksai ir kt. Vis dėlto skirtingų šalių patirtys vertinant šių rodiklių sąsajas su gydymo ligoninėje baigtimis skiriasi [3]. Naudodami nuasmenintus 2020 - 2022 metais dėl COVID-19 Vilniaus universiteto ligoninėje Santaros klinikose hospitalizuotų pacientų duomenis, išbandėme įvairius statistinius ir mašininio mokymosi metodus mirties ligoninėje tikimybei įvertinti, įtraukiant apskaičiuotą NEWS rodiklį, laboratorinių tyrimų rezultatus, informaciją apie gretutines pacientų ligas, pacientų lytį ir amžių. Pranešime bus pristatyti atlikto tyrimo rezultatai.

Literatūra

- [1] Jang, J. G. ir kt. 2020. Prognostic Accuracy of the SIRS, qSOFA, and NEWS for Early Detection of Clinical Deterioration in SARS-CoV-2 Infected Patients. *Infectious Diseases, Microbiology & Parasitology Journal of Korean Medical Science* 35(25): e234.
- [2] Liang, W. ir kt. 2020. Development and validation of a clinical risk score to predict the occurrence of critical illness in hospitalized patients with COVID-19. *JAMA internal medicine* 180(8), 1081-1089.
- [3] Holland, M. ir Kellett, J., 2022. A systematic review of the discrimination and absolute mortality predicted by the National Early Warning Scores according to different cut-off values and prediction windows. *European Journal of Internal Medicine* 98:15-26.

⁹Šis tyrimas yra biomedicininio tyrimo "Lėtinių neinfekcinių ir infekcinių ligų bei COVID-19 ligos tarpusavio sąveikos ir klinikinį baigčių vertinimas Lietuvoje" dalis (bioetikos leidimas - 2022 02 15 Nr. 2022/2-1411-882).

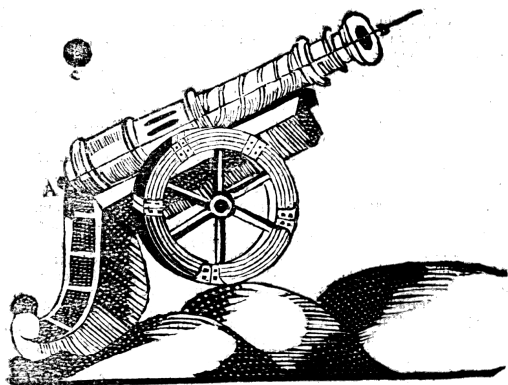
Funkcinių duomenų analizės metodų taikymai oro kokybės duomenų tyrimams

Akvilė Vitkauskaitė, Milda Salytė

Vilniaus universitetas

Oro tarša yra rimta aplinkos problema, kuri daro neigiamą poveikį žmonių sveikatai ir gerovei visame pasaulyje. Labai svarbu stebėti teršalų koncentraciją ir nustatyti potencialius teršalų šaltinius. Šiame darbe buvo ištirtos dvi labai paplitusios orą teršiančios medžiagos - azoto dioksidas (NO₂) ir kietosios dalelės (KD₁₀). Teršalų koncentracija buvo analizuojama šešiose skirtingose vietovėse: Vilniaus Senamiestyje, Vilniaus Lazdynų rajone, Kaune, Klaipėdoje, Šiauliuose ir Mažeikiuose. Duomenys gauti iš Lietuvos Aplinkos apsaugos agentūros. Tam, kad būtų galima matyti ilgalaikę tendenciją, duomenys buvo apdoroti ir pritaikyti taip, kad būtų pašalinti trumpalaikiai svyravimai. Atlikta eksploracinė analizė ir naudoti funkcinės duomenų analizės metodai, tokie kaip PCA, išskirčių aptikimas ir kt. Taip pat buvo patikrinta, ar azoto dioksido ir kietųjų dalelių koncentracija skirtingose vietovėse statistiškai reikšmingai skiriasi.

Stochastiniai metodai ir modeliai



Binominių grafų sąjungos jungumo slenkstis

Daumilas Ardickas

Vilniaus universitetas

Pranešime pasakosiu apie binominių grafų sąjungos [1] jungumo savybės tyrimo rezultatus. Binominių grafų sąjunga yra atsitiktinis grafas, kurį sudaro persidengiančios bendruomenės. Bendruomenės modeliuoja įvairaus dydžio ir tankio binominiai grafai. Kaip ir daugeliu kitų atsitiktinių grafų atveju [2], BGS jungumo savybė pasižymi slenksčiu. Šiame tyrime nustatėme BGS jungumo slenkstį. Gauti rezultatai yra tikslūs: sąlygos, kurių reikalaujame yra minimalios. Tai iliustruoja sukonstruoti pavyzdžiai. Tyrimas atliktas kartu su M. Blozneliu.

Literatūra

- [1] Bloznelis, M., Leskelä, L. (2023): Clustering and percolation on superpositions of Bernoulli random graphs. *Random Structures & Algorithms*.
- [2] Frieze, A., Karoński, M. (2016): Introduction to Random Graphs. Cambridge University Press.

Automobilių dalinimosi sistemos nuo laiko priklausančių charakteristikų skaičiavimas

Mindaugas Bražėnas, Eimutis Valakevičius

Kauno technologijos universitetas

Bus pristatytas automobilių dalinimosi sistemos matematinis modelis, aprašomas Markovo procesu. Anksčiau buvo pastebėta, kad šios sistemos stacionarios charakteristikos nesiskiria nuo to ar keliavimo trukmės modeliuojamos faziniais, ar eksponentiniais skirstiniais su vienodu vidurkiu. Iširta, kad nuo laiko priklausančių charakteristikų reikšmės priklauso nuo to, kokių skirstinių buvo aproksimuotos automobilio važiavimo trukmės. Didinant modelio parametrų reikšmes, sparčiai didėja Markovo grandinės būsenų skaičius, t. y. įvyksta „būsenų sproginimas“. Tokios apimties modelio charakteristikų nepavyksta apskaičiuoti dėl operatyvinių atminties trūkumo arba labai ilgos skaičiavimo trukmės. Norint įveikti šią problemą, darbe yra pasiūlytas Markovo grandinės aproksimavimo mažesne grandine metodas. Norint apskaičiuoti nuo laiko priklausančias modelio charakteristikas, kai žinoma pradinė būsena, pakanka sugeneruoti tik santykinai nedidelę visos grandinės dalį, t. y. visų būsenų pografi. Nuo jo dydžio ir pasirinktos paklaidos priklauso kokiam laikotarpiui galėsime apskaičiuoti apytiksles sistemos charakteristikų reikšmes.

Literatūra

- [1] Bražėnas, M. and Valakevičius E. 2022. Approximation of Non-Markovian Car Sharing Systems Models by Markovian One. In: Arai, K. (eds) *Intelligent Systems and Applications*. IntelliSys 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 543. Springer, Cham. pp. 458-474.
- [2] Wang, S. and Xiao, C. 2023. Novel Algorithms for Efficient Mining of Connected Induced Subgraphs of a Given Cardinality. *Journal of computer science and technology*. arXiv: <https://arxiv.org/abs/2112.07197>.

Apibendrinti atsitiktinių sumų su sunkiauodegiais dėmenimis momentai

Mantas Dirma, Neda Nakliuda, Jonas Šiaulyš

Vilniaus universitetas

Šiame tyrime nagrinėjamas svorinių atsitiktinių sumų $S_n^{\theta\xi} := \theta_1\xi_1 + \dots + \theta_n\xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, apibendrintų nupjautinių momentų $\mathbb{E}(\varphi(S_n^{\theta\xi})\mathbb{1}_{\{S_n^{\theta\xi} > x\}})$ asimptotinis elgesys, kai $x \rightarrow \infty$. Čia $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ yra sunkiauodegių, turinčių dominuojančiai kintančias uodegas, ir galimai priklausomų atsitiktinių dydžių (a.d.s) rinkinys, $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ yra neneigiamų, neišsigimusių nulyje a.d.s rinkinys, o φ yra realias reikšmes įgyjanti funkcija. Nupjautinius momentus $\mathbb{E}(\varphi(S_n^{\theta\xi})\mathbb{1}_{\{S_n^{\theta\xi} > x\}})$ siekiama asimptotiškai aprėžti iš viršaus ir apačios individualių sumos dėmenų momentų $\mathbb{E}(\varphi(\theta_k\xi_k)\mathbb{1}_{\{\theta_k\xi_k > x\}})$, $k = 1, \dots, n$, sumomis tam tikrų koreguojančių konstantų tikslumu. Literatūroje panaši problematika jau nagrinėta laipsninės funkcijos φ atveju: $\varphi(x) = x^\alpha$, $\alpha \in [0, \infty)$ (žr.: [1], [2], [3]). Šiame tyrime parodoma, kad ankstesnius rezultatus galima apibendrinti platesnei funkcijų φ klasei neprarandant asimptotinių rėžių tikslumo ir nepridedant papildomų sąlygų a.d.s ξ_1, \dots, ξ_n ir $\theta_1, \dots, \theta_n$. Laikoma, kad funkcija $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenkina tokias savybes: (i) φ yra nemažėjanti ir diferencijuojama visoms pakankamai didelėms argumento x reikšmėms; (ii) $\varphi(2x) \leq c\varphi(x)$ kažkokiai $c \in \mathbb{R}$ ir visiems pakankamai dideliems x . Gauti rezultatai iliustruojami pavyzdžiais, kuriuose teorinės apibendrintų atsitiktinių sumų momentų reikšmės sulyginamos su Monte Carlo metodu simuluotomis tų momentų reikšmėmis. Pavyzdžiuose priklausomybė tarp a.d.s modeliujama kopulomis.

Literatūra

- [1] Dirma, M., Paukštys, S. and Šiaulyš J. 2021. Tails of the moments for sums with dominantly varying random summands. *Mathematics*, 9(8).
- [2] Leipus, R., Šiaulyš, J. and Vareikaitė I. 2019. Tails of higher-order moments with dominantly varying summands. *Lithuanian Mathematical Journal*, 59, 389-407.
- [3] Leipus, R., Paukštys, S. and Šiaulyš, J. 2021. Tails of higher-order moments of sums with heavy-tailed increments and application to the Haezendonck–Goovaerts risk measure. *Statistics & Probability Letters*, 170, 108998.

Paslinktojo diskretaus atsitiktinio klajojimo tikimybių generuojančioji funkcija

Andrius Grigutis

Vilniaus universitetas

Atsitiktinių dydžių sumų seka $\{\sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}\}$ įprastai yra vadinama atsitiktiniu klajojimu. Pranešimo metu papasakosiu apie pasiskirstymo funkcijos

$$\varphi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (X_i - \kappa) \leq u\right)$$

generuojančiosios funkcijos

$$\varphi(0) + \varphi(1)s + \varphi(2)s^2 + \dots, |s| < 1$$

konstravimą, kai $u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\kappa \in \mathbb{N}$, o atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2, \dots yra nepriklausomi, neneigiami, sveikareikšmiai, ne būtinai vienodai pasiskirstę, bet periodiškai pasikartojantys, t. y. $X_i \stackrel{d}{=} X_{i+N}$ kiekvienam $i \in \mathbb{N}$ ir fiksuotam periodui $N \in \mathbb{N}$.

Diskrečiųjų martingalų statistinių modelių lokalus asimptotinis normalumas

Vaidotas Kanišauskas

Vilniaus universitetas

Duota Lūzino erdvė (E, ε) ir statistinis eksperimentas su filtracija $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$, kuriame Θ yra atviras ir išskilas R^k , $k \geq 1$, poaibis. Sveikaskaitis matas μ , apibrėžtas mačioje erdvėje $(R_+ \times E, \mathcal{B}(R_+) \otimes \varepsilon)$ turi (P_θ, \mathbb{F}) -kompensatorių $\nu(\theta)$ tokį, kad $\nu(\theta, \{t\}, E) \equiv 0$.

1B. Sakykime, kad $\frac{d\nu(y)}{d\nu(\theta)} = V(y, \theta)$ yra $\mathcal{S}(\mathbb{F}) \otimes \varepsilon$ -mačioji griežtai teigiama funkcija tokia,

kad su visais $t \in R_+$, $\theta, y \in \Theta$, P_y -b.v. $(1 - \sqrt{V(y, \theta)})^2 * \nu(\theta)_t < \infty$, $V(\theta, \theta) = 1$.

2B. Visiems $\theta \in \Theta$ egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad funkcijos $V(y, \theta) = V_s(y, \theta, x) = \ln V(y, \theta)$ yra tolydžiai diferencijuojamos visiems $y \in U_\delta(\theta) = \{x : |x - \theta| < \delta\}$ erdvėje $L_{\text{loc}}^2(\nu(\theta))$ pagal P_θ tikimybę, kur $\dot{V}(y, \theta) = (\dot{V}_s^1(y, \theta, x), \dots, \dot{V}_s^k(y, \theta, x))'$, $s \in R_+$, $x \in E$ yra išvestinė

taške y , $\frac{V(y, \theta)}{V(\theta, \theta)} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^{2, (k)}(\nu(\theta), \mathbb{F}, P_\theta)$. Pažymėkime $I_t(\theta) = \dot{V}(\theta, \theta)\dot{V}(\theta, \theta)' * \nu(\theta)_t$, $\varphi_t(\theta) =$

$[I_t(\theta)]^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_u = \theta + \varphi_t(\theta)$, $U_{\theta, t} = \{u \in R^k : \theta_u \in \Theta\}$, $\theta \in \Theta$, $t \in R_+$.

3B. Su visais kompaktais $K \in \Theta$ tolygiai pagal $\theta \in K$, $(I_k$ yra $k \times k$ matavimų vienetinė matrica) $P_\theta - \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\theta)[\dot{V}(\theta, \theta)\dot{V}(\theta, \theta)' * \nu(\theta)_t]\varphi_t(\theta) = I_k$.

4B. Su visais $K \in \Theta$ egzistuoja konstanta $\delta > 0$ tokia, kad tolygiai su visais $\theta \in K$, $\lim_{t \rightarrow \infty} E_\theta |\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta, \theta)|^{2+\delta} * \nu(\theta)_t = 0$.

5B. Su visais $K \in \Theta$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in R_+} \sup_{\theta \in K} P_\theta \{\text{tr}\{\varphi_t(\theta)[\dot{V}(\theta, \theta)\dot{V}(\theta, \theta)' * \nu(\theta)_t]\varphi_t(\theta)\} > N\} = 0$.

Teorema. *Jei tenkinamos 1B-5B sąlygos ir $K \in \Theta$ yra kompaktas, tada kiekvienam $u \in U_{\theta, t}$ $\frac{dP_{\theta_u}^t}{dP_\theta^t} = \exp\left\{u'(\eta_{t, \theta} + \delta_{t, \theta}) - \frac{1}{2}u'(I_k + a_{t, \theta})u\right\}$, kur $\eta_{t, \theta} = \varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta, \theta) * (\mu - \nu(\theta))_t \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2, k}(\mathbb{F}, P_\theta)$, $\mathcal{L}(\eta_{t, \theta}|P_\theta) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} N(0, I_k)$ tolygiai, kai $\theta \in K$, o $\delta_{t, \theta}$ ir $a_{t, \theta}$ tokie, kad tolygiai pagal $\theta \in K$ $P_\theta - \lim_{t \rightarrow \infty} (|\delta_{t, \theta}| + |a_{t, \theta}|) = 0$.*

Atsitiktinai sustabdytos apibendrintų subekspONENTINIŲ SKIRSTINIŲ SUMOS

Jūratė Karasevičienė, Jonas Šiaulyš

Vilniaus universitetas

Tarkime $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ yra nepriklausomi, nebūtinai vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ su pasiskirstymo funkcijomis $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \dots\}$. Tegul η yra skaičiuojantis atsitiktinis dydis nepriklausomas nuo sekos $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Pranešime aptarsime sąlygas, kurioms esant atsitiktinai sustabdytų sumų $S_\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\eta$ pasiskirstymo funkcijos priklausytų apibendrintų subekspONENTINIŲ SKIRSTINIŲ klasei OS .

Sakoma [1, 2], kad pasiskirstymo funkcija F_ξ priklauso apibendrintų subekspONENTINIŲ skirstinių klasei OS , jeigu

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_\xi * F_\xi}(x)}{\overline{F_\xi}(x)} < \infty.$$

Čia simbolis $*$ žymi pasiskirstymo funkcijų sąsūką, o $\overline{F}_\xi = 1 - F_\xi$ žymi pasiskirstymo funkcijos F_ξ uodegą. Tiriant atsitiktinai sustabdytas sumas gauti tokie du teiginiai.

1 Teorema. *Sakykime $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Atsitiktinis dydis η skaičiuojantis ir aprėžtas, t.y. $\mathbb{P}(\eta \in \{0, 1, \dots, M\}) > 0$ kažkokiam $M \in \mathbb{N}$. Jeigu $F_{\xi_1} \in OS$, o kitiems indeksams $F_{\xi_k} \in OS$ arba $\overline{F}_{\xi_k}(x) = O(\overline{F}_{\xi_1}(x))$, tai $F_{S_\eta} \in OS$.*

2 Teorema. *Sakykime $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, o skaičiuojantis atsitiktinis dydis η turi baigtinį bet kurios eilės eksponentinį momentą, t.y. $\mathbb{E}e^{\lambda \eta} < \infty$ bet kuriam $\lambda > 0$. Tada $F_{S_\eta} \in OS$, jeigu $F_{\xi_1} \in OS$ ir patenkinta kuri nors viena iš žemiau esančių sąlygų:*

- $\mathbb{P}(\eta = 1) > 0$ ir $\limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1} \frac{\overline{F}_{\xi_k}(x)}{\overline{F}_{\xi_1}(x)} < \infty$;
- $0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{k \geq 1} \frac{\overline{F}_{\xi_k}(x)}{\overline{F}_{\xi_1}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1} \frac{\overline{F}_{\xi_k}(x)}{\overline{F}_{\xi_1}(x)} < \infty$.

Įrodant pateiktus teiginius naudojami modifikuoti [3] darbo metodai.

Literatūra

- [1] Klüppelberg, C. 1990. Asymptotic ordering of distribution functions and convolution semigroups. *Semigr. Forum*, 40, 77-92.
- [2] Shimura, T. and Watanabe, T. 2005. Infinite divisibility and generalized subexponentiality. *Bernoulli*, 11, 445-469.
- [3] Sprindys, J. Šiaulyš, J. 2020. Regularly distributed randomly stopped sum, minimum, and maximum. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 25, 509-522.

Trupmeninės SDL su minkšta siena

Kęstutis Kubilius

Vilniaus universitetas

Nagrinėjame trupmenines stochastines diferencialines lygtis (TSDL) su minkšta siena, t.y. tiriamo TSDL su pralaidžia sienele. TSDL apibrėžtas procesas su minkšta siena gali kirsti sieną, bet jį veikia pasirinkto dydžio jėga priešinga kryptimi. Kai procesas yra toli nuo sienos, jėga veikia silpnai. Kai jis artėja prie sienos arba kerta ją, jėga veikia stipriau. Procesui kirtus sieną veikiančioji jėga neleidžia jam nuo jos nutolti. Rasime sąlygas, kada SDL su minkšta siena turi vienintelį sprendinį ir ištirsime neišreikštinės Oilerio aproksimacijos konvergavimo greitį į lygties sprendinį.

Literatūra

- [1] Kubilius, K. and Medžiūnas, A. 2023. A class of fractional stochastic differential equations with a soft wall. *Fractal and fractional*. vol. 7, iss. 2, art. no. 110, p. [1-19].
- [2] Kubilius, K. 2023. Fractional SDEs with a soft wall: Existence, uniqueness, and approximations of solutions. Preprint.

Estimates in Wasserstein metric for some weakly dependent random variables

Gabija Liaudanskaitė, Vydas Čekanaavičius

Vilnius University

The sum of symmetric three-point 1-dependent nonidentically distributed random variables is approximated by a compound Poisson distribution in the Wasserstein norm.

The sum $S_n = X_1 + \dots + X_n$ is analyzed. Here $X_j = \xi_j \xi_{j+1}$, $P(\xi_j = -1) = p_j$, $P(\xi_j = 0) = 1 - 2p_j$, and $P(\xi_j = 1) = p_j$. It is proved that, if $\max p_j \leq \frac{1}{24}$,

$$\|F_n - G\| \leq C\varepsilon \min(\sigma^{-3}, 1).$$

Here F_n is a distribution of S_n , $\sigma^2 = \text{Var}S_n$, $\varepsilon = \sum_{k=2}^{n-1} (p_{k-1}p_k p_{k+1} + (p_k p_{k+1})^2)$, $G = \prod_{k=1}^n G_k$, $G_k = \exp\{2p_k p_{k+1}(I_1 + I_{-1} - 2I)\}$.

Lower bound estimates are derived. The Heinrich method is used for the proofs.

References

- [1] Čekanaavičius, V. and Vellaisamy, P. 2021. Compound Poisson approximations in ℓ_p -norm for sums of weakly dependent vectors. *Journal of Theoretical Probability*, **34**, pp. 2241-2264.
- [2] Liaudanskaitė, G. and Čekanaavičius, V. 2020. Approximations for sums of three-valued 1-dependent symmetric random variables. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **25**, 4, pp. 675-691.
- [3] Liaudanskaitė, G. and Čekanaavičius, V. 2022. Compound Poisson approximations to sums of extrema of Bernoulli variables. *Lithuanian Mathematical Journal*, **62**, pp. 481-499.

Apie Kendall'o τ apibendrinimus¹⁰

Martynas Manstavičius

Vilniaus universitetas

Pranešime bus kalbama apie populiaraus statistinės priklausomybės (ranginės koreliacijos, konkordacijos,...) mato, Kendall'o τ , tolydžių atsitiktinių dydžių poroms apibendrinimus. Bendrais teiginiais ir konkrečiais pavyzdžiais pademonstruosime, kad konkordacijos matų aibė, nusakoma M. Scarsini aksiomomis [1], yra tikrai turtinga ir verta tolimesnių tyrimų siekiant, pvz., charakterizuoti konkrečius šios aibės poaibius, minimus M. D. Taylor, H. H. Edwards, P. Mikusiński [2, 3], S. Fuchs [4], C. Borroni [5] ir kitų autorių darbuose.

Literatūra

- [1] Scarsini, M. 1984. On measures of concordance, *Stochastica*, **8**(3):201–218.
- [2] Edwards, H. H., Mikusiński, P., and Taylor, M. D. 2004. Measures of concordance determined by D_4 -invariant copulas, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 3867–3875.
- [3] Edwards, H. H. and Taylor, M. D. 2009. Characterizations of degree one bivariate measures of concordance, *J. Multivariate Anal.*, **100**(8):1777–1791.
- [4] Fuchs, S. 2016. A biconvex form for copulas, *Depend. Model.*, **4**:63–75.
- [5] Borroni, C. G. 2019. Mutual association measure, *Stat. Methods Appl.*, **28**(4):571–591.

¹⁰Tyrimus finansavo Lietuvos mokslo taryba. Grantu numeris S-MIP-20-16

Kelios atsitiktinio efekto transformacijos savybės

Rokas Puišys, Sylwia Lewkiewicz, Jonas Šiaulys

Vilniaus universitetas

Išgyvenamumo funkcijų su atsitiktiniu efektu taikymai mirtingumo tyrimuose aprašomi darbe [1]. Ten pateiktas ir bendras išgyvenimo funkcijos su atsitiktiniu efektu apibrėžimas. Bet kuriai pasiskirstymo funkcijai F vieninteliu būdu yra nusakoma išgyvenimo funkcija $S(x) = \overline{F}(x) = 1 - F(x)$, kitaip dar vadinama pasiskirstymo funkcijos uodega. Bet kuriai išgyvenimo funkcijai S ir bet kuriam teigiamam atsitiktiniam dydžiui Z lygybė

$$S^{(Z)}(x) = \overline{F^{(Z)}}(x) := \mathbb{E}(S^Z(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

apibrėžia naują išgyvenamumo funkciją, įprastai vadinamą išgyvenamumo funkcija su atsitiktiniu efektu. Aišku, kad tokiu atveju funkcija

$$F^{(Z)}(x) := 1 - S^{(Z)}(x) = 1 - \mathbb{E}(S^Z(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

yra nauja pasiskirstymo funkcija, įprastai vadinama pasiskirstymo funkcija su atsitiktiniu efektu. Straipsnyje [1] yra parodyta, kad išgyvenamumo funkcija su teigiamu atsitiktiniu efektu išsaugo pradinės išgyvenamumo funkcijos absoliutų tolydumą. Tai reiškia, kad bet kuriai pasiskirstymo funkcijai F , turinčiai tankį, nauja transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ irgi turi tankį.

Pranešimo metu bus aptariamoms naujos atsitiktinio efekto transformacijos savybės. Žinant, jog pasiskirstymo funkcijos skirstomos į skirtingas reguliarumo klases, galima analizuoti, kokiais atvejais pasiskirstymo funkcija, priklausanti tam tikrai reguliarumo klasei, pritaikius atsitiktinio efekto transformaciją pasilieka toje pačioje reguliarumo klasėje. Pranešimo metu bus apžvelgti rezultatai nustatyti keturioms reguliarumo klasėms: funkcijų su dominuojančiai kintančia uodega klasei \mathcal{D} , ilgauodegių funkcijų klasei \mathcal{L} , \mathcal{O} -eksponentinių funkcijų klasei \mathcal{OL} ir funkcijų su reguliariai kintančia uodega klasei \mathcal{R} . Atlikta analizė rodo, kad pasiskirstymo funkcijoms F , esančioms klasėse \mathcal{D} , \mathcal{L} , \mathcal{OL} transformuotos pasiskirstymo funkcijos $F^{(Z)}$ pasilieka minėtose klasėse bet kokiam teigiamam atsitiktiniam dydžiui Z . Tuo tarpu klasėje \mathcal{R} situacija yra sudėtingesnė. Atsitiktinio efekto transformacijos poveikis pradinėi pasiskirstymo funkcijai F atliekamas metodais aprašytais knygoje [2].

Literatūra

- [1] Šiaulys, J. and Puišys, R. 2022. Survival with random effect. *Mathematics*, 10, 1097.
- [2] Leipus, R., Šiaulys, J. and Konstantinides, D. 2023. *Closure Properties for Heavy-Tailed and Related Distributions*. Springer, (the final version in progress).

Apie kai kurias m -priklausomųjų atsitiktinių dydžių sumų aproksimacijas

Jonas Kazys Sunklodas

Vilniaus universitetas

Tegul ξ_1, \dots, ξ_n ir Y_1, \dots, Y_n yra realieji atsitiktiniai dydžiai (a. d.). Šių a. d. fiksuoto dėmenų skaičiaus n sumas pažymėkime atitinkamai

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad \text{ir} \quad Z_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

Mus domina dydžio $|\mathbf{E}h(S_n) - \mathbf{E}h(Z_n)|$ viršutiniai įverčiai glodžioms funkcijoms $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R} – realioji tiesė), kai ξ_1, \dots, ξ_n yra m -priklausomieji a. d., o Y_1, \dots, Y_n yra m_0 -priklausomieji a. d., ir sveikieji $m \geq m_0 \geq 0$ (žr. [3]). Autorius nerado nei vieno paskelbto rezultato apie dyžio $|\mathbf{E}h(S_n) - \mathbf{E}h(Z_n)|$ viršutinius įverčius, kai sumos S_n ir Z_n yra sudarytos iš skirtingų m -priklausomųjų a. d. sekų. Čia galbūt pirmą kartą siekiama užpildyti šią spragą sprendžiant šį uždavinį. Panašūs rezultatai, kai h yra triskart diferencijuojama funkcija su $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h'''| < \infty$, išmaniojo kelio interpoliacijų metodu buvo gauti φ -susimaišiusiems a. d. straipsnyje [2] ir stipriai susimaišiusiems realiesiems atsitiktiniams laukams straipsnyje [1].

Dydžio $|\mathbf{E}h(S_n) - \mathbf{E}h(Z_n)|$ viršutiniai įverčiai straipsnyje [3] buvo gauti išmaniojo kelio interpoliacijų metodu, naudojant skirtumo $\mathbf{E}h(S_n) - \mathbf{E}h(Z_n)$ išdėstymą be a. d. blokų.

Literatūra

- [1] V. Bentkus and J. Sunklodas, On normal approximations to strongly mixing random fields, *Publ. Math. Debrecen*, **70**(3–4):253–270, 2007.
- [2] J. Sunklodas, Some estimates of the normal approximation for φ -mixing random variables, *Lith. Math. J.*, **51**(2):260–273, 2011.
- [3] J. Sunklodas, On some approximations for sums of m -dependent random variables, *Lith. Math. J.* (įteikta).

Kelių skirstinių klasių nupjautiniai momentai

Jonas Šiaulys, Remigijus Leipus, Saulius Paukštys

Vilniaus universitetas

Sakykime ξ^+ yra atsitiktinio dydžio ξ , su pasiskirstymo funkcija F_ξ , teigiamoji dalis. Jeigu šios teigiamos dalies p -osios eilės momentas $\mathbb{E}(\xi^+)^p$ yra baigtinis, tai šio momento nupjautinė dalis $\bar{F}_{\xi,p}(x) = \min \left\{ 1, \mathbb{E}(\xi^p \mathbb{1}_{\{\xi > x\}}) \right\}$, $x \geq 0$, yra naujos pasiskirstymo funkcijos $F_{\xi,p}$ uodega. Pasiskirstymo funkcijos $F_{\xi,p}$ konstrukcija nusako nupjautinio momento transformaciją pradinei pasiskirstymo funkcijai F_ξ .

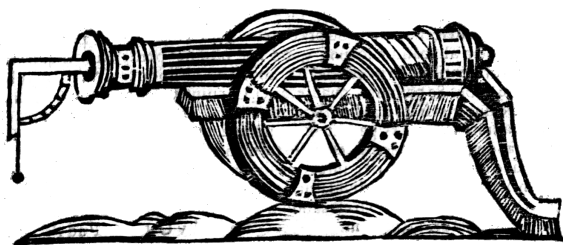
Pranešimo metu bus aptariama kurias reguliarumo savybes pasiskirstymo funkcija F_ξ perduoda pasiskirstymo funkcijai $F_{\xi,p}$, ir kurias savybes funkcija $F_{\xi,p}$ perduoda funkcijai F_ξ . Bus apžvelgti rezultatai nustatyti šešioms reguliarumo klasėms: funkcijų su dominuojančiai kintančia uodega klasei \mathcal{D} , ilgauodegių funkcijų klasei \mathcal{L} , funkcijų su nuosaikiai kintančia uodega klasei \mathcal{C} , \mathcal{O} -eksponentinių funkcijų klasei \mathcal{OL} , funkcijų su reguliariai kintancia uodega klasei \mathcal{R} ir funkcijų klasei su eksponentinio pavidalo uodega $\mathcal{L}(\gamma)$, $\gamma > 0$.

Atlikta analizė papildo klasikinius Karamata rezultatus [1, 2] ir klasių uždaroumo savybes, surinktas knygoje [3]. Gauti rezultatai detalai surašyti straipsnyje [4].

Literatūra

- [1] Karamata, J. 1933. Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 61, 55-62.
- [2] Seneta, E. 1976. *Regularly Varying Functions. Lecture Notes in Mathematics, volume 508*. Springer-Verlag, Berlin.
- [3] Leipus, R., Šiaulys, J. and Konstantinides, D. 2023. *Closure Properties for Heavy-Tailed and Related Distributions*. Springer, (the final version in progress).
- [4] Paukštys, S., Šiaulys, J. and Leipus, R. 2023. Truncated moments for heavy-tailed and related distribution classes, (under review).

Teorinë informatika



ASTRO-

Išsibarsčiusios, totalaus branduolio ir pilno branduolio Būlio funkcijos

Valdas Dičiūnas

Vilniaus universitetas

Būlio funkcijų $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ minimalių schemų ar formulių sintezė vis dar lieka svarbi informatikoje ir dirbtinio intelekto vystyme. Daugelis minimalių normaliųjų disjunkcinių formų (NDF) paieškos algoritmų turi tris etapus: (1) randame sutrumpintą NDF, sudarytą iš visų duotos funkcijos pirminių implikančių, (2) randame funkcijos branduolį – aibę pirminių implikančių, įeinančių į visas šios funkcijos minimalias NDF, ir (3) atliekame paiešką tarp likusių pirminių implikančių, kurias iš jų prijungti prie branduolio. Šiame darbe mes nagrinėjame kai kurias klases Būlio funkcijų, kurioms trečio etapo nereikia.

Būlio funkciją vadiname *totalaus branduolio funkcija*, jei jos branduolys sutampa su visa pirminių implikančių aibe, ir *pilno branduolio funkcija*, jei jos branduolio implikančių disjunkcija yra duotos funkcijos NDF (o kartu ir minimali NDF). Ieškant minimalios NDF pirmo tipo funkcijoms užtenka realizuoti pirmus du aukščiau minėtus etapus. Antro tipo funkcijoms dar reikia patikrinti, ar rastas branduolys uždengia visus Būlio funkcijos vienetus.

Tegu $N_f = \{\alpha \in \{0, 1\}^n: f(\alpha) = 1\}$ yra funkcijos f vienetų aibė. Funkciją f atitinka grafas $G_f = (V, E)$, kurio viršūnių aibė $V = N_f$, o briaunų aibė sudaro tokios poros viršūnių (α, β) , kurios skiriasi tik viena koordinate. Kitaip sakant, grafas G_f yra funkcijos f vienetų aibės N_f indukuotas pografis hyperkube $\{0, 1\}^n$ (plg. [1]). Būlio funkciją f vadiname *išsibarsčiusia*, jei ją atitinkančiame grafe maksimalaus kelio ilgis yra nedidesnis už 2. Tokių funkcijų grafai yra sudaryti iš vienos ar kelių nesikertančių žvaigždžių S_k ($k = 0, 1, \dots, n$), kur žvaigždė S_k sudaro viena grafo viršūnė sujungta briaunomis su likusiomis k viršūnių (kitokių briaunų nėra). Nesunku įrodyti, kad visos išsibarsčiusios funkcijos yra totalaus branduolio funkcijos.

Savo darbe mes pateikiame pilną išsibarsčiusių funkcijų ir jų minimalių NDF klasifikaciją tais atvejais, kai Būlio funkcijų kintamųjų skaičius neviršija 5. Šiems atvejams mes taip pat randame totalaus branduolio ir pilno branduolio funkcijų skaičių ir tų funkcijų np-klases. np-klase vadiname aibę Būlio funkcijų, kurias galima gauti viena iš kitos naudojant kintamųjų perstatymus (p) ir/arba kintamųjų neiginius (n) (žr. simetrijos tipus straipsnyje [2]).

Literatūra

- [1] Harary, F. 1989. The graph of a boolean function, *J. Expt. Theor. Artif. Intell.* 2:163-169.
- [2] Slepian, D. 1953. On the number of symmetry types of boolean functions of n variables, *Canad. J. Math.* 5:185-193.

Kai kurie aspektai atsitiktinių grafų kategorijos

Irus Grinis

Vilniaus universitetas

Rendami $G(n, p)$ atsitiktinių grafų modeliu, bandomė tirti kategoriją, kurios objektai yra minėti grafai, o morfizmai – „redagavimo operacijos“, kurios perveda vieną grafą į kitą.

Literatūra

- [1] Béla Bollobás 1985. Random Graphs. Academic Press Inc., London Ltd.
- [2] Pierce, Benjamin C. 1991. Basic Category Theory for Computer Scientists. MIT Press. ISBN 978-0-262-66071-6.

Apie sveikųjų skaičių sekų, asocijuotų su pirminiais dvyniais, apskaičiavimą

Martynas Sabaliauskas, Igoris Belovas, Paulius Mykolaitis

Vilniaus universitetas

Pirminių dvynių hipotezė teigia, kad egzistuoja be galo daug pirminių skaičių porų, kurių nariai tarpusavyje skiriasi 2. Nagrinėjant šią hipotezę, buvo gauta daug svarbių rezultatų, tačiau problema taip ir liko neišspręsta. Šiame darbe pirminių dvynių problema nagrinėjama iš eksperimentinės matematikos pusės. Taikant tikimybinį Milerio-Rabino pirminio skaičiaus testą ir lygiagrečiųjų skaičiavimų technologijas, yra eksperimentiškai tiriamas pirminių dvynių pasiskirstymas intervaluose $(2^n, 2^{n+1}]$. Yra nagrinėjama sveikaskaitė seka $a_n = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 7, 7, 12, 26, 45, 70, 113, 215, 355, 666, \dots\}$, kur $a_n = \#\{2^n \leq p < 2^{n+1} \mid p+2 \text{ yra pirminis}\}$, bei jos apibendrinimai (sekos, asocijuotos su kitomis pirminių skaičių poromis ir pirminiais m -pletais). Ištyrus seką $\{a_n\}$ skaitiniais metodais, paaiškėjo, kad jos gretimų narių santykis a_{n+1}/a_n , kai $n \rightarrow \infty$, artėja prie tam tikros reikšmės iš intervalo $(1.9, 2]$. Darbe parodoma, jei yra teisinga pirmoji Hardžio-Litlvudo hipotezė, tai sekos gretimų narių santykis asimptotiškai yra lygus 2. Darbe yra gautas ir konvergavimo greičio įvertis. Eksperimentinės matematikos dėka gautas rezultatas duoda pagrindą tikėti, kad $a_n > 0$, kai $n \rightarrow \infty$, ir tuo pačiu prideda dar vieną argumentą nuomonės, kad pirminių dvynių skaičių yra be galo daug, naudai.

Literatūra

- [1] Aletheia-Zomlefer, S. L., Fukshansky, L., Garcia, S. R. 2020. The Bateman–Horn conjecture: Heuristic, history, and applications, *Expo. Math.*, 38:430–479.
- [2] Di Pietro, G. 2021. Numerical analysis approach to twin primes conjecture. *Notes Number Theory Discrete Math.*, 27:175–183.
- [3] Maynard, J. 2019. The twin prime conjecture. *Jpn. J. Math.* 14:175–206.

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
info@leidykla.vu.lt, www.leidykla.vu.lt
Knygos internete www.knygynas.vu.lt
Mokslo periodikos žurnalai www.zurnalai.vu.lt
Spausdino UAB „Ciklonas“
Žirmūnų g. 68, LT-09124 Vilnius
Tiražas ?? egz.